

Eigenschaften von Pilzbillards und Korrelationsfunktionen von Streumatrixelementen in Mikrowellenresonatoren

Vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

angefertigt von

Dipl.–Phys. Thomas Friedrich
aus Groß-Umstadt

Februar 2007

Darmstadt
D 17

Referent:	Professor Dr. rer. nat. Dr. h.c. mult. A. Richter
Korreferent:	Professor Dr. rer. nat. J. Wambach
Tag der Einreichung:	6. Februar 2007
Tag der Prüfung:	30. April 2007

Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind Untersuchungen zu den quantenmechanischen Zuständen pilzförmiger Billardsysteme sowie zu den Streueigenschaften klassischer und quantenmechanischer offener Billards. Basierend auf einer Analogie zwischen Quantenbillards und flachen elektromagnetischen Kavitäten wurden hierzu Experimente mit Mikrowellenresonatoren durchgeführt.

Pilzbillards sind Systeme mit gemischter Dynamik mit der besonderen Eigenschaft, dass ihr klassischer Phasenraum klar in einen regulären und einen chaotischen Bereich getrennt ist. Daher stellen sie ideale Systeme zum Studium der Wechselwirkung von Regularität und Chaos dar. In dieser Arbeit wurden erstmals die Eigenschaften von pilzförmigen *Quantenbillards* untersucht. Hierzu wurden Resonanzspektren supraleitender Mikrowellenbillards sowie Intensitätsverteilungen des elektrischen Feldes bei Raumtemperatur gemessen.

Die Eigenwertspektren wurden mit statistischen Methoden untersucht. Es wurden zwei wesentliche Punkte herausgearbeitet: Erstens wurde deutlich, dass in klassischen Quantenpilzbillards dominante, kurze periodische Bahnen existieren können, die eine Superschalenstruktur in der Niveaudichte des entsprechenden Quantenbillards verursachen. Die Einflüsse dieser Bahnen manifestieren sich sogar in der Verteilung der Abstände benachbarter Eigenwerte. Dieses Ergebnis ist verwunderlich, da typischerweise nur langreichweitige Korrelationen der Spektren durch kurze Bahnen beeinflusst werden. Zweitens wurden in den untersuchten Größen Signaturen des in der klassischen Mechanik verbotenen dynamischen Tunnelns erkannt. Pilzbillards erscheinen als ideale Systeme, um diesen komplizierten Effekt, der in allen Systemen mit gemischter Dynamik gegenwärtig ist und zur Zeit auf großes Interesse im Quantenchaos stößt, näher zu untersuchen. Andererseits konnten, trotz der Wechselwirkung vermöge des Tunneleffektes, fast alle Eigenwerte des Systems einem chaotischen bzw. regulären Teilspektrum zugeordnet werden. Dies ist auf die scharfe Trennung des klassischen Phasenraums zurückzuführen.

In den gemessenen Intensitätsverteilungen macht sich diese Trennung ebenfalls bemerkbar. Durch eine Überlagerung der Verteilungen der chaotischen Zustände wurde die mittlere Aufenthaltswahrscheinlichkeit für ein quantenmechanisches

Teilchen im Billard bestimmt, sie folgt ihrem klassischen Analogon bis auf Quanteneffekte in der Größenordnung der Wellenlänge.

Weiterhin wurden klassische Pilsbillards mit einer Öffnung am Rand in numerischen Simulationen untersucht. Sie stellen ein Streusystem dar, bei dem von außen eingebrachte Teilchen eine gewisse Zeit lang reguläres Verhalten zeigen, bevor sie wieder austreten. Die Verweildauer im Billard kann nicht jeden beliebigen Wert annehmen. Die erlaubten Zeiten sind sehr selektiv, und die ersten von ihnen zeigen eine Systematik ähnlich der in Fibonacci-Folgen. Durch eine Analyse der möglichen Teilchenbahnen konnte sie verstanden werden. Die Ergebnisse erscheinen z. B. für Nanostrukturen relevant.

Auch ohne eine echte Öffnung stellt ein Mikrowellenbillard ein offenes Streusystem dar, bei dem Energie über Antennen durch den Resonator transportiert wird. Dieser Prozess ist mit einer Compoundkernreaktion vergleichbar, bei der ein Targetkern mit einem Teilchen oder einem Quant beschossen wird und einen Compoundkern bildet, der schließlich zerfällt. Die offenen Reaktionskanäle entsprechen im Resonator den Antennen und den Ohmschen Verlusten in den Wänden. Für eine Beschreibung im Rahmen der Zufallsmatrixtheorie wird für Atomkerne wie auch Resonatoren der selbe Ansatz für die Streumatrix benutzt. Während in der Kernphysik nur der Wirkungsquerschnitt experimentell zugänglich ist, können in Mikrowellenbillards Amplitude und Phasen der Streumatrixelemente bestimmt werden. Daher ist es möglich, theoretische Vorhersagen von Verbaarschot, Weidenmüller und Zirnbauer (VWZ) für die Autokorrelationsfunktion der Streumatrixelemente unter Verwendung großer Datensätze zu testen. Von besonderem Interesse ist hierbei der Übergangsbereich zwischen isolierten Resonanzen und dem Bereich der Ericson-Fluktuationen, in dem die Resonanzen stark überlappen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Streumatrixelemente eines chaotischen Billardsystems gemessen. Es wurde gezeigt, dass das Modell die gemessenen Daten gut beschreibt. Hierfür wurde die theoretische Vorhersage an die Fourierkoeffizienten des gemessenen Spektrums angepasst. Deren Fehler sind nicht korreliert. Ein Fahrplan für ein ausstehendes, statistisch fundiertes Testverfahren der Vorhersagen von VWZ konnte erarbeitet werden.

Abstract

The present doctoral thesis is concerned with the investigation of the quantum states of billiards with the shape of a mushroom and the scattering properties of open classical and quantum mechanical billiard systems. For this, based on the analogy between quantum billiards and flat electromagnetic cavities, experiments with microwave resonators have been performed.

Mushroom billiards are systems with a mixed classical dynamics and the particular property, that their classical phase space is clearly divided into a regular and a chaotic part. Accordingly, they provide an ideal system for the study of the interaction between regularity and chaos. In the present work, for the first time, the properties of quantum mushroom billiards were investigated. For this, resonance spectra were measured with superconducting resonators and their eigenfunctions were obtained from measurements of the electric field intensities at room temperature.

The eigenvalue spectra were investigated with statistical methods. Two main results were acquired: First, it became apparent, that there are two dominant and short periodic orbits in a classical mushroom billiard which cause a super-shell structure in the level density of the corresponding quantum billiard. The influence of these orbits becomes manifest even in the nearest neighbor spacing distribution of adjacent eigenvalues. This result is remarkable, as typically only long range correlations are influenced by short periodic orbits. Second, in all investigated quantities signatures of the classically forbidden dynamical tunneling were observed. Mushroom billiards seem to provide an ideal system for the study of this complex effect, which is present in all systems with mixed dynamics and currently is of large interest in the quantum chaos community. Despite the interaction through quantum dynamical tunneling, essentially all eigenvalues could be attributed to either regular or chaotic states. This can be ascribed to the clear separation of the classical phase space into a regular and a chaotic part.

This separability is also observed in the measured intensity distributions. By superimposing the distributions related with chaotic states the mean probability for a quantum particle to stay inside the billiard was evaluated. Up to quantum effects of the order of the typical wave length its behavior is close to that of its classical analog.

Moreover, classical mushroom billiards with a hole in their boundary were investigated numerically. Such billiards constitute a scattering system. In the open billiards considered here a particle entering the billiard performs regular motion for a certain time before it finally escapes. However, the staying time cannot take any arbitrary value. In fact, the first allowed values show a systematics which reminds on a Fibonacci series. It could be understood with help of an analysis of the possible particle orbits. The results seem to be relevant for nano structures.

Even without an opening in its side walls, a microwave billiard is an open scattering system, where microwave power is transported through the resonator via antennas. This scattering process is comparable with that of a compound nucleus reaction, where a target nucleus is bombarded by a particle, thereby forming a compound nucleus, which eventually decays. The open reaction channels correspond to the antennas and the ohmic resistance in the walls of the resonator. For a statistical description in the framework of random matrix theory the same scattering matrix ansatz is used for both scattering processes. While in nuclear physics only cross sections, that is the absolute value of the scattering matrix is measurable, in microwave experiments the full scattering matrix is accessible. As a consequence, theoretical predictions by Verbaarschot, Weidenmüller and Zirnbauer (VWZ) for the autocorrelation functions of the scattering matrix elements can be tested with large data sets. Here, the transition region between isolated resonances and the regime of Ericson fluctuations, where resonances strongly overlap, is of particular interest.

In the framework of the present doctoral thesis, the scattering matrix elements of a chaotic billiard were measured. It could be shown, that the VWZ model provides a good description for the experimental data. The theoretical prediction was fitted to the Fourier coefficients of the measured spectra, as their errors are uncorrelated. A guideline for a statistically well-founded test procedure for the description of the predictions by VWZ could be developed.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	4
2.1	Regularität und Chaos	4
2.2	Klassische Billards	5
2.3	Quantenchaos und Quantenbillards	6
2.4	Mikrowellenresonatoren	8
3	Klassische Pilzbillards	11
3.1	Pilzbillards als Generalisierung des Stadionbillards	11
3.2	Phasenraumbetrachtungen	14
4	Spektrale Eigenschaften von Quantenpilzbillards	18
4.1	Experiment	18
4.1.1	Konzeption der Resonatoren	18
4.1.2	Experimenteller Aufbau	20
4.1.3	Spektren und Extraktion der Eigenwerte	21
4.2	Eigenwertstatistik	22
4.2.1	Entfaltung der Eigenwerte	23
4.2.2	Eigenwertkorrelationen	26
4.3	Längenspektren	30
4.3.1	Identifikation periodischer Bahnen	30
4.3.2	Vergleich mit dem Kreisbillard	32
4.4	Dominante periodische Bahnen	35
4.4.1	Superschalen in Pilzbillards	35

4.4.2	Struktur in der Abstandsverteilung benachbarter Eigenwerte	38
4.5	Reguläre und chaotische Zustände	40
4.5.1	Separation regulärer und chaotischer Moden	40
4.5.2	Statistische Eigenschaften der Teilspektren	41
4.5.3	Dynamisches Tunneln	43
5	Wellenfunktionen von Quantenpilzbillards	46
5.1	Experimentelle Bestimmung von Intensitätsverteilungen	46
5.2	Eigenzustände des Pilzbillards	48
5.3	Mittlere Intensitätsverteilung chaotischer Moden	52
6	Zerfallsverhalten von offenen Pilzbillards	55
6.1	Offenes Pilzbillard und Theta-Billard	55
6.2	Verweildauern bei festem Drehimpuls	58
6.3	Verweildauern bei variablem Drehimpuls	61
6.4	Diskussion der Ergebnisse	63
7	Fluktuationen der Streumatrixelemente in Mikrowellenresonatoren	65
7.1	Experiment	66
7.2	Modellvorstellungen	70
7.3	Auswertungen der Korrelationsfunktionen	75
7.3.1	Bestimmung der Parameter des VWZ-Modells	76
7.3.2	Absorption	77
7.3.3	Vergleich: Experiment und VWZ-Vorhersage	80
7.4	Ausblick	83
8	Schlussbemerkungen	86

A	Bestimmung des Chaotizitätsgrades	88
B	Extraktion von Bahnen aus der Niveaudichte	89
C	Weylsche Formel für zylindrische Mikrowellenresonatoren oberhalb ihrer Grenzfrequenz	89

1 Einleitung

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts herrschte in der Physik die Meinung vor, dass die bis dato bekannten physikalischen Gesetze die Welt vollständig beschreiben könnten [1]. Es ginge also lediglich darum, unerforschte Nischen im damaligen fest stehenden Gerüst physikalischer Erkenntnisse auszufüllen. Noch bevor diese Vorstellung durch die Entwicklung der Quantenmechanik und der Relativitätstheorie revidiert werden musste, wurde Poincaré auf irreguläre Formen klassischer Teilchenbewegung aufmerksam: Er fand, dass in einem Mehrkörpersystem wie zum Beispiel unserem Sonnensystem alle Bahnen sehr sensitiv von den Anfangsbedingungen abhängen, und zeigte, dass die involvierten Variablen der Bewegung nicht vorhersagbar sein können [2]. Es wurde klar, dass selbst in der klassischen Mechanik noch längst nicht alle Facetten der Physik verstanden sind, und die Untersuchung nichtlinearer Systeme, die einen Großteil der physikalischen Forschung im 20. Jahrhundert bestimmen sollte, wurde populär.

In der Mitte des letzten Jahrhunderts wurde schließlich gezeigt, dass nichtlineare Systeme Langzeitstabilität aufweisen können, falls die Störungen (z. B. die gegenseitige Wechselwirkung zwischen einzelnen Körpern in einem Mehrteilchensystem) klein bleiben. Dieses Konzept wurde im KAM-Theorem von Kolmogorov, Arnold und Moser mathematisch formuliert [3] und eröffnete neue Möglichkeiten zur Untersuchung komplexer Systeme. Als besonders einfache und anschauliche Systeme rückten in den letzten Jahrzehnten Billards, d. h. die freie Teilchenbewegung in einem durch harte Wände berandeten Gebiet, ins Interesse [4]. Viele Arbeiten untersuchten auch, unter anderem hervorgerufen durch die Entwicklung der Rechnertechnik, iterative Abbildungen, die nichtlinearen Systemen entsprechen [5]. Eine Veröffentlichung aus dem Jahr 1975 trägt den Titel “Period three implies Chaos” [6]. Hierdurch bekam diese Klasse der irregulären Bewegung ihren Namen.

Schnell stellte sich die Frage nach den Konsequenzen chaotischer bzw. regulärer Dynamik für die Quantenmechanik. Aus Arbeiten in der Kernphysik wurde deutlich, dass sich die Bewegungsform in den statistischen Eigenschaften von Eigenwerten und -funktionen äußert. Die beiden theoretischen Säulen des Quantenchaos, die Zufallsmatrixtheorie [7] und die Theorie periodischer Bahnen [8,9] wurden weiterentwickelt und verfeinert und erlauben semiklassische Vorhersagen für eine

ganze Bandbreite beobachtbarer Größen, die in einer Vielzahl von experimentellen Arbeiten bestätigt werden konnten. Eine besondere Rolle spielen hierbei Experimente mit flachen Mikrowellenresonatoren, mit denen Eigenschaften von quantenmechanischen Billards experimentell untersucht werden können [10, 11]. Ausgehend von der Infrastruktur rund um den supraleitenden Darmstädter Elektronenlinearbeschleuniger S-DALINAC konnten diese Experimente durch die Verwendung von supraleitenden Kavitäten perfektioniert werden, was eine große Anzahl von Eigenzuständen des Resonators zugänglich macht. Eine kurze Beschreibung der Grundlagen des klassischen Chaos, des Quantenchaos sowie der Experimente findet sich in Kap. 2 dieser Arbeit.

Nachdem die statistischen Eigenschaften von rein regulären und rein chaotischen Quantensystemen gut verstanden sind, werden gegenwärtig verstärkt Systeme mit gemischter Dynamik betrachtet, die in der Natur häufig vorkommen. Es stellte sich heraus, dass schon in klassischen Systemen das Zusammenspiel von Regularität und Chaos in der Regel sehr kompliziert ist. Die quantenmechanische Beschreibung gemischter Systeme ist eine aktuelle Herausforderung. Im Jahr 2001 wurde von Bunimovich, dem Vater des bekannten Stadionbillards, eine neue Klasse von Billardsystemen mit gemischter Dynamik vorgestellt [12]. Sie besitzen eine Form, die an den Querschnitt eines Pilzes erinnert. Ihre Dynamik ist, obwohl sie teils regulär und teils chaotisch ist, erstaunlich einfach und zudem analytisch fassbar. In Kap. 3 dieser Arbeit werden die besonderen Eigenschaften von klassischen Pilzbillards detailliert beschrieben. Sofort stellte sich die Frage nach den Eigenschaften dieser sog. *Pilzbillards* in der Quantenmechanik. Aus dieser Motivation heraus wurden im Rahmen dieser Arbeit zunächst Experimente mit pilzförmigen flachen Mikrowellenresonatoren entworfen und durchgeführt. Die damit erhaltenen Spektren und Intensitätsverteilungen bildeten die Grundlage zur Analyse der Eigenschaften von Quantenpilzbillards. Kapitel 4 beschreibt die Experimente zur Untersuchung der spektralen Eigenschaften der Pilzbillards, deren Auswertung und die Ergebnisse. Die Messungen der Intensitätsverteilungen ihrer Eigenzustände werden in Kap. 5 behandelt.

Neben Systemen mit gemischter Dynamik sind auch offene Systeme Gegenstand aktueller Forschung [13], was durch die rasante Entwicklung der Nanotechnologie motiviert wird. In technisch realisierten Systemen wie nanotubes [14], nanowires [15] oder quantum dots [16] spielen Transporteigenschaften durch ein Sy-

stem von Potentialbarrieren eine Rolle. Ihre Eigenschaften wie Verweildauern oder Transmissionswahrscheinlichkeiten können durch idealisierte Billards abgeschätzt werden. Dabei sind sowohl klassische als auch quantenmechanische Betrachtungen hilfreich. Es wurden mit diesem Hintergrund, wie in Kap. 6 dargestellt, die Verweildauern von klassischen Teilchen in offenen Pilzbillards untersucht.

Atomkerne stellen ebenfalls offene Systeme dar, denn sie können in Kernreaktionen angeregt werden. Dabei wird ein von außen kommendes Teilchen oder Quant im Kern deponiert, und es bildet sich ein Compoundkern [17], der anschließend wieder zerfallen kann. Als Folge der Kopplung an die Außenwelt über Anregungs- und Zerfallskanäle zeigen die Wirkungsquerschnitte Resonanzen mit einer nicht verschwindenden Energiebreite. Welche Aussagen kann man über den Kern treffen, wenn die Resonanzen überlappen und teilweise nicht mehr aufgelöst werden können? Vor bereits über 20 Jahren wurden hierzu von Verbaarschot, Weidenmüller und Zirnbauer (VWZ) im Rahmen der Zufallsmatrixtheorie Vorhersagen für die Korrelationsfunktionen der Streumatrixelemente gemacht [18], die den Bereich der *Ericson-Fluktuationen* [19] bei sehr hohen Energien als Grenzfall enthalten. Diese Ergebnisse können in einem streutheoretischen Zusammenhang gesehen werden und sind längst nicht nur auf die Kernphysik beschränkt.

Noch immer steht ein experimenteller Test für die Vorhersagen von VWZ aus. Hierzu kann man die Analogie der Compoundkernreaktionen zu Mikrowellenbillards benutzen: Die Anregungs- und Zerfallskanäle der Kernreaktionen entsprechen den Ein- und Auskopplungsantennen einer Mikrowellenkavität. Der Streumatrixansatz für Compoundkernreaktionen [20] und der für elektromagnetische Resonatoren sind von der selben Form. In letzteren sind jedoch Amplitude *und* Phase der Streumatrixelemente zugänglich – von Kernreaktionen kann nur der Wirkungsquerschnitt gemessen werden. Außerdem erhält man mit Mikrowellenbillards nahezu lückenlose und breitbandige Resonanzspektren. In dieser Arbeit konnte Datenmaterial von isolierten bis hin zu überlappenden Resonanzen bereitgestellt werden, was einen Test der Vorhersagen von VWZ ermöglicht. Dabei müssen Ohmsche Leitungsverluste durch weitere offene Kanäle modelliert werden. Motiviert durch Arbeiten zu Ericson-Fluktuationen wurden Wege erarbeitet, um die gemessenen Daten mit den Vorhersagen zu vergleichen. Ein geeignetes Testverfahren wird gegenwärtig konstruiert. In Kap. 7 dieser Arbeit findet sich die Beschreibung der Experimente sowie der Schritte zu deren Auswertung.

2 Grundlagen

2.1 Regularität und Chaos

Jedes physikalische System der klassischen Mechanik kann durch eine Hamilton-Funktion charakterisiert werden, und die Zeitentwicklung des Systems ist durch die Hamiltonschen Gleichungen gegeben [21]. Die Hamilton-Funktion beinhaltet im Fall einer Bewegung im N -dimensionalen Ortsraum $2N$ generalisierte Koordinaten (z. B. Ortsvariablen und die dazu kanonisch konjugierten Impulse). Zudem genügt sie verschiedenen Symmetrien, wie z. B. der Translationsinvarianz in der Zeit. Nach dem Noether-Theorem korrespondiert zu jeder Symmetrie eine Erhaltungsgröße. Findet man N Erhaltungsgrößen, so sind die Hamiltonschen Gleichungen integrabel und in geschlossener Form lösbar. Die Zeitentwicklung ist damit bekannt, und die Bewegung über beliebig lange Zeiten vorhersagbar, d. h. *regulär*.

Chaotische Bewegung ist hingegen dadurch gekennzeichnet, dass ihre Zeitentwicklung zwar durch die Hamiltonschen Gleichungen determiniert ist, diese aber nicht geschlossen lösbar sind, da Erhaltungsgrößen fehlen. Man spricht daher auch von deterministischem Chaos [22, 23]. Iterative Lösungsansätze (z. B. Reihenentwicklungen oder Störungstheorie) divergieren. Das bedeutet, dass schon kleine Störungen in den Anfangsbedingungen zu beliebig großen Störungen in der Bewegung zu späteren Zeiten führen können. Dabei divergieren zunächst benachbarte Trajektorien im Phasenraum exponentiell als Funktion der Zeit, während sie im Falle regulärer Bewegung höchstens linear schnell auseinander driften. Ein Maß für die Divergenz von Trajektorien fast identischer Anfangsbedingungen ist durch Lyapunov-Exponenten [5] gegeben.

Eine weitere Klasse dynamischer Systeme beinhaltet sowohl reguläre als auch chaotische Bahnen. Es hängt dann von den Anfangsbedingungen einer Bahn ab, welcher Dynamik sie folgt. Man spricht hier von Systemen mit *gemischter Dynamik*.

2.2 Klassische Billards

Billards sind berandete Gebiete, in denen sich Teilchen frei bewegen können. Treffen sie auf die Berandung, werden sie elastisch reflektiert. Die Wände stellen damit unendlich hohe Potentialbarrieren dar. Typischerweise werden zwei- oder dreidimensionale Billards mit einem Teilchen betrachtet [4, 24]. Sie sind idealisierte Systeme, deren Dynamik lediglich von der Form des Randes abhängt.

Abbildung 2.1 zeigt einen Überblick über einige der in der Literatur am meisten behandelten Billardsysteme mit typischen Teilchenbahnen. In einfachen Billards wie dem Kreis-, Rechteck- oder dem Ellipsenbillard ist die Bewegung völlig integrabel.

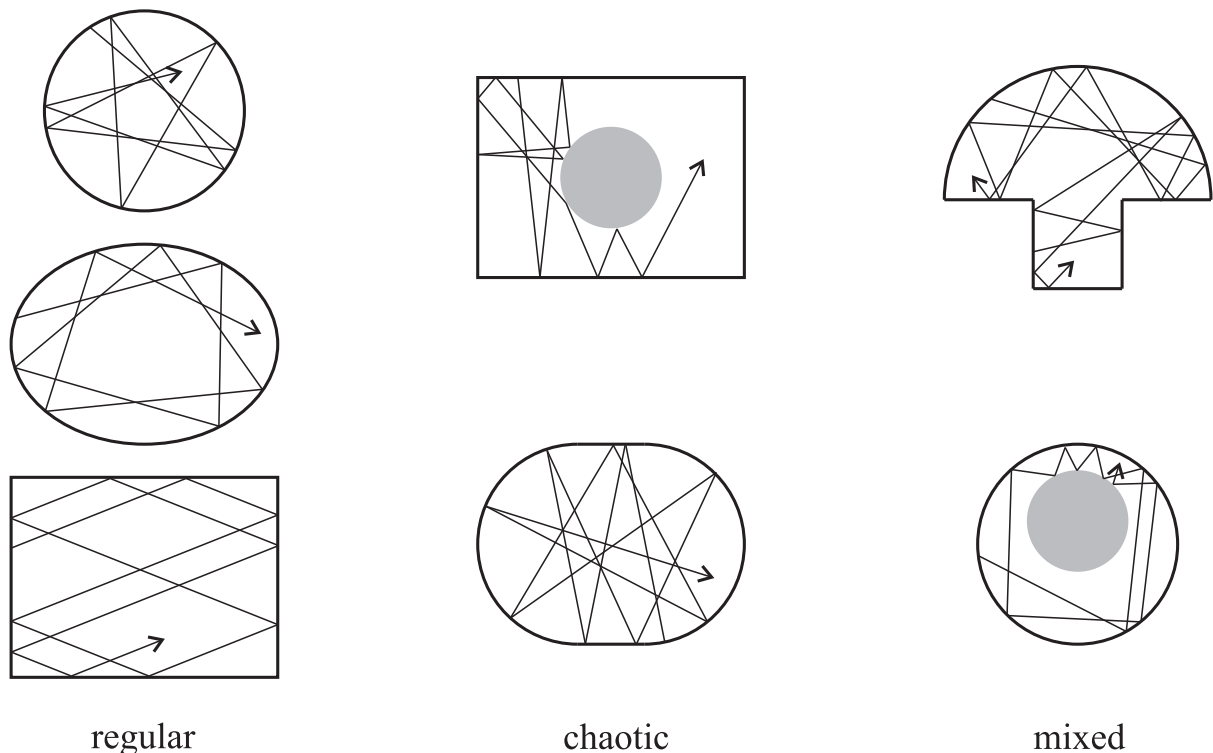


Abb. 2.1: Übersicht über typische Billardgeometrien. Regulär sind das Kreisbillard, das Ellipsenbillard und das Rechteckbillard. Die Bahnen in den ersten beiden bilden Kaustiken. Chaotische Systeme sind das Sinai- und das Stadionbillard. Das Pilzbillard und das nicht konzentrische Ringbillard zeigen gemischte Dynamik – es gibt sowohl reguläre als auch chaotische Bahnen darin.

Die zugehörigen Bahnen erzeugen regelmäßige Muster, und ihre Segmente umlaufen beim Kreis und der Ellipse eine Kaustik [25], die sie tangential berühren – beide Eigenschaften sind charakteristisch für eine reguläre Teilchenbewegung. Im Bunimovich-Stadionbillard [26] gibt es nur chaotische Bahnen¹. Ein anderes Beispiel für ein chaotisches System ist das Sinai-Billard [4]. Das nicht-konzentrische Ringbillard [27] und die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Pilzbillards [12] zeigen gemischte Dynamik. Um aus diesen idealisierten physikalischen Systemen mehr über in der Natur realisierte Systeme zu erfahren, wurden z. B. auch offene Billards [28, 29], diffraktive (pseudointegrable) [30] oder solche mit weichen Potentialwänden [31] betrachtet.

2.3 Quantenchaos und Quantenbillards

In der Quantenmechanik sind Ort und Impuls eines Teilchens auf Grund der Unschärferelation nie gleichzeitig scharf definiert. Es gibt vielmehr Wellenpakete, die durch eine Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte in Ort und Impuls repräsentiert werden können. Der klassische Phasenraum und damit auch der Begriff der Trajektorie lässt sich daher nicht ohne weiteres auf die Quantenmechanik übertragen. Es stellt sich die Frage, wie sich chaotische Bewegung in der Quantenmechanik manifestiert. Will man wie in der klassischen Physik die Eigenschaften der Zeitentwicklung eines Systems und eines leicht gestörten Systems miteinander vergleichen, so involviert dieses Vorgehen auf Grund der Unschärferelation stets die Betrachtung von Wellenpaketen und damit eine Mittelung. Daraus kann man Konzepte wie den Quanten-Lyapunov-Exponent [32] oder das Loschmidt-Echo [33] definieren. Wie äußert sich jedoch die einem System zu Grunde liegende Dynamik in den Größen der Schrödinger-Gleichung, d. h. den Wellenfunktionen und Energien der Zustände des Systems? Dies ist eine grundsätzliche Frage in chaotischen Quantensystemen.

¹Es gibt tatsächlich auch neutralstabile, sog. *bouncing ball* Bahnen zwischen den planparallelen Wänden im Stadionbillard, die stabil gegenüber einer Störung in einer Richtung, instabil gegenüber einer Störung in der dazu orthogonalen Richtung sind. Diese Bahnen haben jedoch das Maß 0 im Raum aller konjugierten Koordinatenpaare (Phasenraum) und werden daher an dieser Stelle nicht weiter diskutiert.

Verlustfreie Quantensysteme zeichnen sich durch diskrete Energiespektren aus. Die sie beschreibende Schrödinger-Gleichung hat abzählbare Eigenfunktionen und -werte als Lösung. Bereits in den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts zeigte sich ausgehend von kernphysikalischen Experimenten, dass die Eigenwerte und -funktionen universelle statistische Eigenschaften besitzen. Basierend auf theoretischen Überlegungen von Wigner im Rahmen der Kernphysik etablierte sich die Zufallsmatrixtheorie (Random Matrix Theory, RMT), in der angenommen wird, dass der Hamilton-Operator eines chaotischen Systems mit gebundenen Zuständen generische statistische Eigenschaften innehat. Er ist *nicht* von einer Matrix mit gaußverteilten Zufallszahlen zu unterscheiden [34–36]. Liegt Zeitumkehrsymmetrie vor, so muss der Hamilton-Operator reell sein, und das entsprechende Zufallsmatrixensemble wird als Gaußsches orthogonales Ensemble (GOE) bezeichnet. Seine statistischen Eigenschaften sind invariant unter orthogonalen Transformationen. Tatsächlich zeigten eine Vielzahl von Experimenten, dass die daraus abgeleiteten statistischen Eigenschaften der Eigenwerte und -funktionen die experimentellen Daten (etwa Kernspektren) gut beschreiben [37]. Es wurde die Hypothese aufgestellt, dass alle Quantensysteme, deren klassisches Analogon chaotisch ist, GOE-Verhalten zeigen. Diese These wird als Bohigas-Giannoni-Schmit Vermutung [38] bezeichnet, und kürzlich wurden sogar Ansätze zu einem Beweis dieser Vermutung gefunden [39].

Reguläre Systeme zeichnen sich hingegen dadurch aus, dass hinreichend viele Symmetrien existieren, so dass die Bewegungsgleichung auch in der Quantenmechanik integriert werden kann. Es ergeben sich Eigenzustände, die zu Quantenzahlen eines Satzes von Erhaltungsgrößen korrespondieren. Da diese ihre Werte unabhängig voneinander annehmen können, folgen die Eigenwerte Poissonscher Statistik – einzelne Eigenwerte sind also nicht korreliert. Allgemein kann man regulären Quantensystemen jedoch keine generischen Eigenschaften zuschreiben.

Eine andere Beschreibungsmöglichkeit für Quantensysteme basiert auf dem Korrespondenzprinzip. Die semiklassischen Quantisierungsmethoden von Bohr und Sommerfeld wurden später in mehrerlei hinsicht erweitert. Dieser Werdegang ist übersichtlich in [9] zusammengestellt. Auf dieser Grundlage gelang es Gutzwiler, eine Formel zur Quantisierung chaotischer Systeme herzuleiten [8] – seine sog. *Spurformel*. Dadurch können Quantenspektren aus der Gesamtheit der klassischen periodischen Bahnen des Systems berechnet werden. Es können so-

gar reguläre Systeme mittels einer Variante der Spurformel quantisiert werden, die kontinuierliche Symmetrien berücksichtigt [40,41]. Diese Theorie periodischer Bahnen (Periodic Orbit Theory, POT) liefert Informationen darüber, auf welche Weise sich die klassische Dynamik auf die Quantenmechanik überträgt. Zum Beispiel lassen sich Schalenstrukturen in den Energiespektren von Atomen, Metallclustern und Molekülen durch semiklassische Methoden auf die Einflüsse einzelner periodischer Bahnen zurückführen [9].

Wie für das klassische Chaos werden Billards auch für das Quantenchaos oft studiert, zumal sie idealisierte, einfache und sehr anschauliche Systeme sind. Es gibt eine Vielzahl von theoretischen Studien zu den Eigenfunktionen und -werten von Quantenbillards. Dabei wurde auch Augenmerk auf nichtklassische Effekte wie dynamisches Tunneln [42] oder Lokalisierungsphänomene der Wellenfunktionen [43] gelegt.

2.4 Mikrowellenresonatoren

Quantenbillards sind schwer zu verwirklichen. Meist hat man es mit einem Vielteilchensystem in einem effektiven Potential zu tun. Die Wände sind nicht ideale Potentialstufen. Quantenstrukturen zeigen im Allgemeinen elektronisches Rauschen (shot noise). Außerdem sind die Eigenwerte und -funktionen nicht ohne Weiteres zugänglich. Durch die im Folgenden beschriebene Analogie der Quantenmechanik zur Elektrodynamik kann man jedoch ein zweidimensionales Quantenbillard durch flache Mikrowellenresonatoren simulieren.

Die Eigenwerte und -vektoren eines Quantenbillards sind durch die Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen

$$(\Delta + k^2)\psi(\vec{r}) = 0 \tag{2.1}$$

mit der Randbedingung

$$\psi(\vec{r})|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.2}$$

bestimmt. Dabei ist $\psi(\vec{r})$ die Wellenfunktion im Ortsraum, k die Wellenzahl und $\partial\Omega$ der Rand des Billards. Die Gln. (2.1) und (2.2) definieren das quantenmechanische Billardproblem. Dabei ist die Wellenzahl über $k = \sqrt{2mE/\hbar}$ mit der Energie

E des Teilchens verknüpft; m bezeichnet seine Masse und \hbar ist das Plancksche Wirkungsquantum.

Aus den Maxwell'schen Gleichungen lässt sich die vektorielle Helmholtz-Gleichung für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$

$$(\Delta + k^2)\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (2.3)$$

mit der Randbedingung

$$\vec{E}_{\parallel}(\vec{r})|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.4)$$

herleiten [44]. Eine entsprechende Wellengleichung ergibt sich für das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r})$. Dabei ist die Wellenzahl über $k = 2\pi f/c$ mit der Frequenz f verknüpft; c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit. Für zylindrische Resonatoren (d. h. Kavitäten mit parallelen Boden- und Deckelflächen sowie dazu senkrechten Seitenwänden) zerfallen die auftretenden Moden in transversal magnetische (TM) und transversal elektrische (TE) Moden. Wenn die z -Achse parallel zu den Seitenwänden der Kavität verläuft, sind sie durch $B_z(\vec{r}) = 0$ bzw. durch $E_z(\vec{r}) = 0$ definiert. Unterhalb der Grenzfrequenz

$$f_{\text{gr}} = \frac{c}{2d} \quad (2.5)$$

können für die Kavitätshöhe d nur Eigenschwingungen der ersten TM Mode existieren. Bei diesen Resonanzzuständen hat das elektrische Feld nur eine Komponente in z -Richtung. Sie ist entlang dieser Richtung konstant. In einem hinreichend flachen Mikrowellenresonator kann man also das elektrische Feld durch die skalare Größe $E_z(x, y)$ vollständig beschreiben, und die vektorielle Helmholtz-Gleichung wird zu einer skalaren. Sie ist äquivalent zur Schrödinger-Gleichung (2.1). Daher kann man flache Mikrowellenresonatoren in handlichen Größen² als Modelle benutzen, um Wellenfunktionen und Eigenenergien zweidimensionaler Quantenbillards zu untersuchen. Von verschiedenen Arbeitsgruppen wurden zahlreiche Arbeiten unter Ausnutzung dieser Analogie durchgeführt [45–51].

Im Experiment benötigt man noch einen Messapparat, der die Kavität zu Schwingungen anregt: Die Mikrowellenleistung wird über Dipolantennen in den Resonator eingespeist und kann dort zur Ausbildung von Resonanzzuständen führen.

²Typischerweise werden Wellenlängen im Bereich von 1 – 30 GHz benutzt.

Über dieselbe oder eine andere Antenne kann das Signal ausgelesen und in einem Netzwerkanalysator mit dem Eingangssignal in Amplitude und Phase verglichen werden. Somit ist die Streumatrix S_{ab} des Systems experimentell zugänglich, wobei die Antennen a und b die Ein- und Ausgangskanäle des Signals darstellen. Dieses Bild ist analog zu Compoundkernreaktionen, bei denen der Zwischenkern ganz ähnlich über einen Kanal angeregt werden kann bzw. über einen Kanal zerfällt. Die Streumatrix kann als Summe über komplexe Resonanzterme

$$S_{ab} = \delta_{ab} - i \sum_{\mu} \frac{\Gamma_{\mu a} \Gamma_{\mu b}}{f - f_{\mu} + i \frac{\Gamma_{\mu}}{2}} \quad (2.6)$$

geschrieben werden. Für hinreichend große Eigenwertabstände zeigen sich Breit-Wigner-Resonanzformen [52] um die Resonanzfrequenzen f_{μ} . Dabei sind $\Gamma_{\mu a}$ und $\Gamma_{\mu b}$ die Partialbreiten und Γ_{μ} die totale Breite der Resonanz μ . Im Bereich überlappender Resonanzen interferieren benachbarte Resonanzen miteinander.

Da es sich um Streuexperimente³ handelt, wird während des Messprozesses Energie durch die Antennen dissipiert. Ein zusätzlicher Energieverlust tritt durch Ohmsche Verluste bei den Reflexionen der Welle an den metallischen Resonatorwänden auf. Sind die Verluste nicht zu groß, so entsprechen die Resonanzfrequenzen und Feldverteilungen den Eigenwerten und -vektoren des entsprechenden idealisierten Billards. Die Dissipationen können sehr gering gehalten werden, wenn man den Resonator in einen supraleitenden Zustand versetzt. In der Darmstädter Gruppe für Quantenchaos geschieht dies mit Kavitäten, deren Wände aus Niob bestehen oder galvanisch verbleit wurden. Sie werden im Experiment auf 4.2 K, der Temperatur flüssigen Heliums abgekühlt. Die geringeren Verluste führen zu geringeren Resonanzbreiten. Daher können weit mehr Eigenwerte als im normalleitenden Fall identifiziert werden, was für eine fundierte statistische Analyse unerlässlich ist. Die Intensitätsverteilungen der Resonanzzustände sind ebenfalls experimentell zugänglich. Hierzu wird ein kleiner Störkörper in den Resonator eingebracht, und die dadurch induzierte Frequenzverschiebung gibt Aufschluss über die Feldstärke am Ort der Störung. In der vorliegenden Arbeit werden sowohl Spektren supraleitender Kavitäten als auch Intensitätsverteilungen normalleitender Pilzbillards präsentiert.

³In dieser Tatsache manifestiert sich bereits die Analogie zur Quantenmechanik: Um Informationen über ein System zu bekommen, muss man es öffnen, d. h. über einen Messapparat an die Außenwelt koppeln. Quantensysteme verändern aber genau dadurch ihre Eigenschaften.

3 Klassische Pilzbillards

3.1 Pilzbillards als Generalisierung des Stadionbillards

Das Stadionbillard wurde 1974 von Bunimovich eingeführt [26] und war seitdem in zahlreichen Arbeiten ein Standardobjekt für die theoretische und experimentelle Untersuchung von Fragestellungen aus dem klassischen Chaos sowie dem Quantenchaos. Im Jahr 2001 wurde von Bunimovich die Familie der Pilzbillards als Generalisierung des Stadionbillards vorgeschlagen [12]. Ein Pilzbillard besteht aus einem typischerweise halbkreisförmigen Hut und einem rechteckigen Stamm, so dass die Form des Billards an den Querschnitt eines Pilzes erinnert. Pilzbillards zeigen gemischte Dynamik. In Abb. 3.1 ist zu erkennen, dass sie bei verschwindender Breite des Stammes in das integrable Halbkreisbillard übergehen. Im entgegengesetzten Grenzfall wird der Stamm so breit wie der Hut, und es entsteht die Hälfte eines chaotischen Stadionbillards.

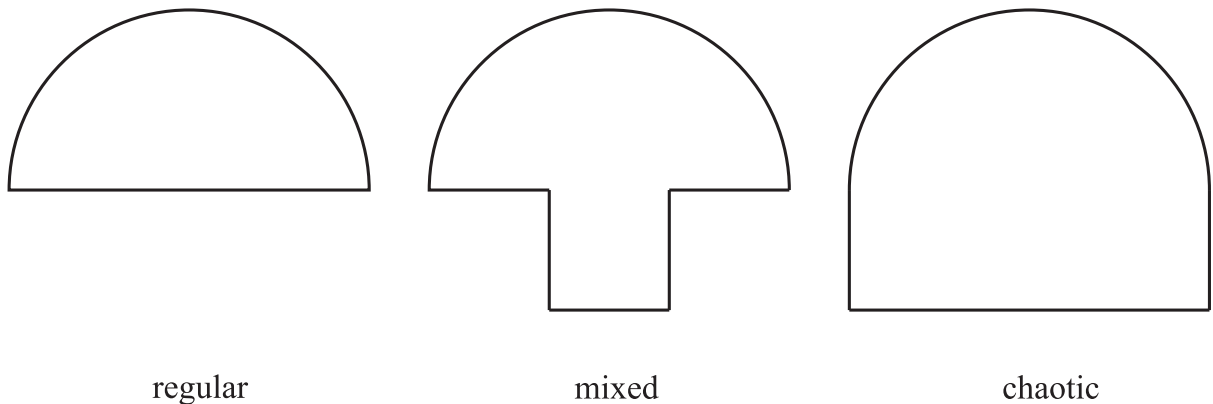


Abb. 3.1: Pilzbillards bestehen aus einem Stamm und einem Hut. Sie können als Generalisierung des Stadionbillards verstanden werden. Bei verschwindender Stammbreite gehen sie in das integrable Halbkreisbillard über. Ist der Stamm hingegen so breit wie der Hut, ergibt sich die Hälfte eines Bunimovich Stadionbillards, was völlig chaotische Dynamik zeigt. Pilzbillards bilden eine Familie von Systemen mit gemischter Dynamik.

Allgemein können Pilzbillards auch aus elliptischen Hüten besitzen, und auch der Stamm kann beispielsweise die Form eines Dreiecks annehmen. Selbst dann bleibt die Eigenschaft erhalten, dass die so definierte Familie von Billards in ihren Grenzfällen für verschwindende bzw. maximale Stammbreite in ein reguläres bzw. chaotisches System übergeht. Abbildung 3.2 zeigt einige Beispiele für Pilzbillards mit verschiedenen Formen und Stammbreiten. Alle Beispiele zeigen die im Folgenden diskutierten Eigenschaften. Das Beispiel ganz rechts in dieser Abbildung ist ein desymmetrisiertes Pilzbillard mit einem dreiecksförmigen Stamm von der Art, wie es in der vorliegenden Arbeit benutzt wurde. Bereits jetzt gibt es einige Veröffentlichungen, die die Eigenschaften von Pilzbillards näher beleuchten [53–63].

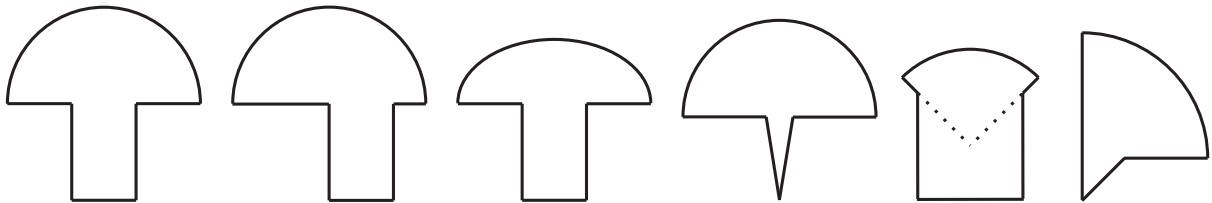


Abb. 3.2: Varianten von Pilzbillards. Der Stamm kann von einem Rechteck oder einem Dreieck gebildet werden. Der Hut ist ein Halbkreis oder eine halbe Ellipse. Auch Segmente davon sind als Hut möglich. Das letzte Beispiel ist desymmetrisiert – solche Billards wurden in den Experimenten benutzt, die in der vorliegenden Arbeit beschrieben werden.

Pilzbillards besitzen, wie jedes System mit gemischter Dynamik, reguläre und chaotische Teilchenbahnen. Die regulären Bahnen bleiben für alle Zeiten im Hut des Pilzes. Bei Pilzbillards mit einem halbkreisförmigen Hut besitzen sie stets den selben Einfallswinkel, gemessen gegen die Normale im Reflexionspunkt, bei Reflexionen mit der kreisförmigen Berandung und können mit den Sternpolygonbahnen [64] im Kreisbillard identifiziert werden. Sie bilden eine kreisförmige Kaustik um den Mittelpunkt, da die einzelnen Bahnsegmente zwischen zwei Reflexionen stets den selben Abstand zum Mittelpunkt haben. Abbildung 3.3(a) zeigt eine solche Bahn, die zugehörige Kaustik ist gestrichelt dargestellt. Der Betrag des Drehimpulses L der Bahn ist bei konstantem Impulsbetrag $|\vec{p}| = 1$ gerade gleich dem Kaustikradius r_{caustic} , da

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r}_{\text{caustic}} \times \vec{p}| = |\vec{r}_{\text{caustic}}| |\vec{p}| = r_{\text{caustic}} \cdot \quad (3.1)$$

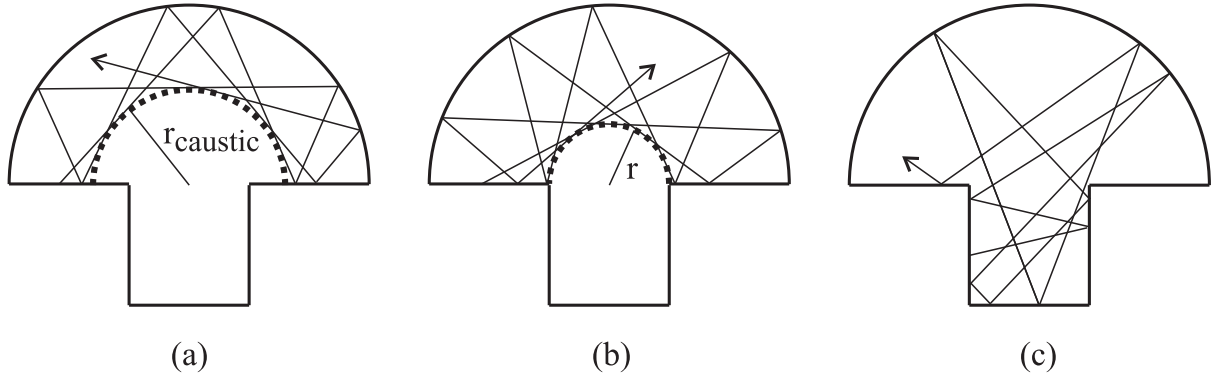


Abb. 3.3: Bahnen im Pilzbillard: Reguläre Bahnen bleiben für alle Zeiten im Hut und bilden Kaustiken mit Radius r_{caustic} aus (a). Die kleinstmögliche Kaustik ist durch die Stammbreite gegeben (b). Eine Bahn im Hut verliert den Drehimpuls als Konstante der Bewegung, wenn sie in den Stamm gelangt. Daher füllen chaotische Bahnen die ganze Billardfläche aus (c).

In Abb. 3.3(b) ist eine reguläre Bahn mit dem minimal möglichen Drehimpuls gezeigt. Hier ist der Kaustikradius gerade gleich der halben Stammbreite r des Pilzbillards. Daraus wird ersichtlich, dass Bahnen mit einem kleineren Drehimpuls irgendwann⁴ in den Stamm gelangen werden. Dort bleibt der Reflexionswinkel und damit auch der Drehimpuls nicht mehr erhalten. Der Wegfall dieser Erhaltungsgröße bedeutet, dass solche Bahnen chaotisch sind. Abb. 3.3(c) zeigt eine chaotische Bahn. Wenn eine solche Bahn erneut in den Hut gelangt, hat sie einen anderen Drehimpuls, der aber wiederum kleiner als der minimale Drehimpuls für eine reguläre Bahn r ist. Es gibt also in Pilzbillards mit kreisförmigen Hüten mit Radius R reguläre Bahnen mit Drehimpuls L , die in einem Kreisring $r < L < R$ existieren, und chaotische Bahnen, die das ganze Billard ausfüllen. Bunimovich führte in diesem Zusammenhang den Begriff des erweiterten Stamms ein: Der erweiterte Stamm entspricht dem eigentlichen Stamm und einem aufgesetzten Halbkreis mit Radius r . In ihm sind nur chaotische Bahnen zu finden. Im verbleibenden Kreisring koexistieren chaotische und reguläre Bahnen.

⁴Es gibt auch neutralstabile Bahnen in gewissen Orientierungen mit einem kleinerem Drehimpuls, die nie den Stamm erreichen. Diese stellen jedoch eine Nullmenge dar. Eine genauere Diskussion findet sich in [55, 56] sowie in Kap. 6

3.2 Phasenraumbetrachtungen

Um die Dynamik eines Systems quantitativ fassen zu können, untersucht man den Phasenraum des Systems, der durch die funktional unabhängigen Paare kanonisch konjugierter Variablen aufgespannt wird. Der Phasenraum eines zweidimensionalen Billards ist daher allgemein vierdimensional, kann aber durch die schon oben verwendete Annahme eines konstanten Impulsbetrags auf drei Dimensionen reduziert werden. Eine gängige Technik zur Darstellung von Phasenräumen ist der sog. Poincaré-Schnitt. Dabei betrachtet man sich eine Schnittfläche durch den gesamten Phasenraum. In Birkhoff-Koordinaten wird wie in Abb. 3.4(a) der Rand des Billards von einem Punkt ausgehend mit der Länge l parametrisiert. Trifft ein

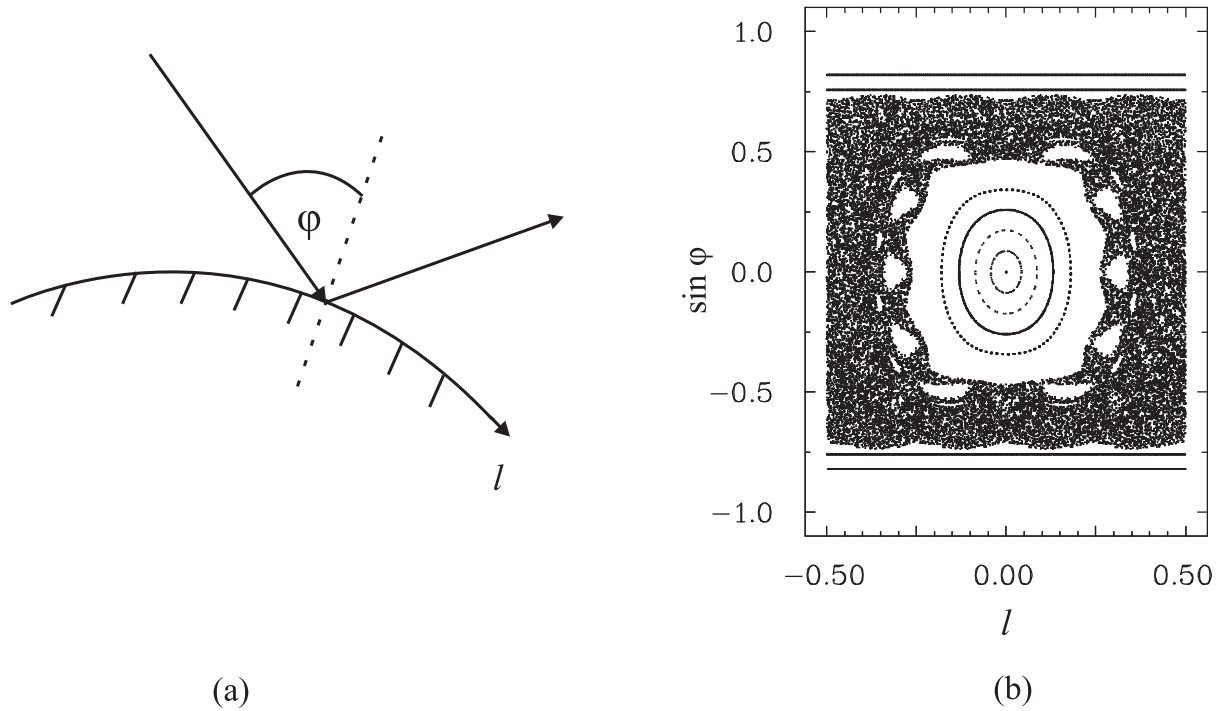


Abb. 3.4: Poincaré-Schnitte von Phasenräumen werden für Billards oft in Birkhoff-Koordinaten, d. h. einer Längenparametrisierung l und der Impulskomponente entlang der Berandung $\sin \varphi$ angegeben (a). Ein typischer Poincaré-Schnitt eines Systems mit gemischter Dynamik, hier von einem Ringbillard, ist in (b) gezeigt. Deutlich zu erkennen ist eine große Insel der Stabilität, die in das chaotische Meer eingebettet ist. Sie wird von kleineren Inseln umgeben, die wiederum von kleineren umgeben sind, usw., so dass sich eine fraktale Inselstruktur offenbart.

Teilchen die Berandung unter dem Einfallswinkel φ , so ist die Impulskomponente $p_{\parallel} = \sin \varphi$ entlang der Berandung die zu l konjugierte Variable. Der Flächeninhalt eines durch die konjugierten Variablen definierten Flächenelements bleibt nach dem Liouville-Theorem in dieser Auftragung invariant unter der Zeitentwicklung nach der Hamilton-Funktion des Systems.

Abbildung 3.4(b) zeigt einen Poincaré-Schnitt in Birkhoff-Koordinaten aus [65] für ein nicht-konzentrisches Ringbillard. Chaotische Bahnen manifestieren sich in dieser Darstellung als wahllos (stochastisch) verteilte Punkte. Reguläre Bahnen verursachen reguläre Muster, die oft auch als *Inseln der Stabilität* bezeichnet werden und im *chaotischen Meer* eingebettet sind. Um die große Insel herum erkennt man im Poincaré-Schnitt weiterhin kleinere Inseln, die wiederum von noch kleineren umrundet werden. Dabei handelt es sich um eine hierarchische, fraktale Anordnung von sog. KAM Inseln um die große Insel herum. Diese Eigenschaft ist typisch für Phasenräume der meisten Systeme mit gemischter Dynamik: Der Übergang zwischen Regularität und Chaos geschieht nicht instantan, sondern findet in einem Übergangsgebiet mit endlicher Breite statt, in welchem Gebiete regulärer Dynamik und Gebiete chaotischer Dynamik zusammen existieren. Daher sind nahezu alle Untersuchungen an Systemen mit gemischter Dynamik viel komplizierter als an solchen mit rein regulärer oder rein chaotischer Dynamik.

Bei Pilzbillards gestaltet sich der Phasenraum viel einfacher. Da, lediglich der Wert des Drehimpulses bezüglich des Mittelpunktes des kreisförmigen Hutes darüber entscheidet, ob eine Bahn regulär oder chaotisch ist, zeichnet sich die Grenze zwischen den Teilbereichen im Phasenraum als eine saubere Grenzfläche und im Poincaré-Schnitt als eine einzige Linie ab. Eine solche Eigenschaft wurde bisher nur für eine mathematischen Abbildung [66], nicht aber für ein Billard beobachtet. Abbildung 3.5 zeigt einen Pilz (a) mit Radius $R = 1$, Stammbreite $r = 1/2$ und Stammtiefe $h = 1/2$ und den zugehörigen Poincaré-Schnitt (b) in Birkhoff-Koordinaten. Die chaotischen Bereiche sind grau schraffiert. Im Gegensatz zu Abb. 3.4(b) zeigt sich keine stabile Insel, was daran liegt, dass die Berandung des Pilzbillards bei den Punkten C und D einen 90° Innenwinkel besitzt, und dadurch eine Diskontinuität in p_{\parallel} verursacht. Dies kann behoben werden, indem man auf der Kreisperipherie anstatt p_{\parallel} die zur Berandung senkrechte Impulskomponente $p_{\perp} = \sin \varphi$ aufträgt – der entsprechende Poincaré-Schnitt ist in Abb. 3.5(c) gezeigt. In dieser Darstellung verliert man jedoch die Flächenerhaltung.

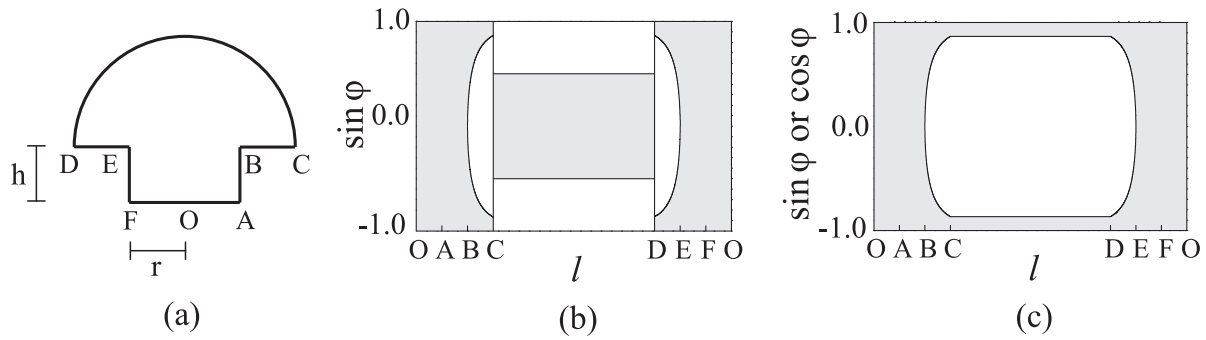


Abb. 3.5: Poincaré-Schnitt (b) des Pilzbillards (a). Chaotische (schattiert) und reguläre Gebiete (weiß) sind klar voneinander getrennt. Es zeigt sich bei den Punkten C und D, die den Ecken des Hutes entsprechen, eine Diskontinuität. Sie wird aufgehoben, wenn entlang der Kreisperipherie die zur Berandung senkrechte Impulskomponente anstatt der tangentialen aufgetragen wird (c). Eine Insel der Stabilität ist zu erkennen. Die Auftragungen (b) und (c) wurden nicht durch Monte-Carlo-Methoden, sondern analytisch mit den im Text erläuterten Methoden erhalten.

Während typischerweise Eigenschaften des Phasenraumes für Systeme mit gemischter Dynamik numerisch mit Monte-Carlo-Methoden erkundet werden, lassen sich bei Pilzbillards die Eigenschaften analytisch bestimmen. Hierzu betrachtete Bunimovich [54] einen Punkt A, der an einem beliebigen Ort im erweiterten Stamm liegt, sowie einen Punkt B im verbleibenden Kreisring, der einen Abstand \tilde{r} zum Mittelpunkt des kreisförmigen Hutes hat, siehe Abb. 3.6. Alle Bahnen, die durch Punkt A laufen, sind chaotisch. Daher gehört der entsprechende Bereich im Phasenraum für alle Winkel zum chaotischen Meer. Durch Punkt B hingegen laufen sowohl reguläre als auch chaotische Bahnen. Alle Bahnen durch B, die die minimale Kaustik schneiden, sind chaotisch, dargestellt durch den schraffierten Winkelbereich in der Abbildung. Alle anderen sind regulär. Aus elementarer Geometrie folgt, dass der Anteil der chaotischen Bahnen durch einen Punkt im Kreisring mit Abstand \tilde{r} vom Kreismittelpunkt durch

$$p_c(\tilde{r}) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{r}{\tilde{r}} \quad (3.2)$$

gegeben ist. Für jeden Punkt im Billard kann somit angegeben werden, ob, und wenn ja, unter welchen Winkeln reguläre Bahnen existieren. Somit sind der Phasenraum und die Poincaré-Schnitte exakt berechenbar – auch die in Abb. 3.5

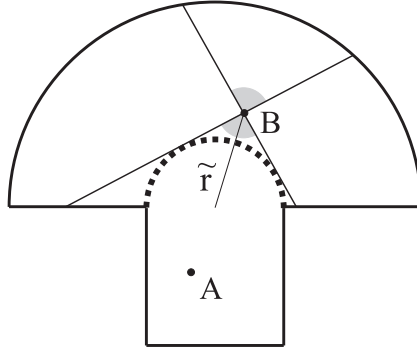


Abb. 3.6: Zur Berechnung von Phasenraumeigenschaften der Pilzbillards führt die folgende Idee: Punkt A liegt im erweiterten Stamm unterhalb der minimal möglichen Kaustik. Dort kann es nur chaotische Bahnen geben. Punkt B hingegen liegt im äußeren Kreisring im Abstand \tilde{r} zum Mittelpunkt des Halbkreises. Durch B laufende Bahnen sind nur dann chaotisch, wenn sie die minimal mögliche Kaustik schneiden und damit in den eingezeichneten schattierten Bereichen liegen.

gezeigten Schnitte wurden nach dieser Methode bestimmt.

Im gesamten Phasenraum sind die Gebiete gleichartiger Dynamik zusammenhängend. In Pilzbillards gibt es somit nur ein chaotisches Meer und eine Insel der Stabilität. Durch Integration über den chaotischen Bereich wird der Chaotizitätsgrad q_c , definiert als Anteil aller möglichen Anfangsbedingungen, die zu chaotischen Bahnen führen, wie in Anhang A dargestellt, bestimmt. Durch die Wahl der Parameter r/R und h/R kann somit ein Pilz mit beliebigem minimalen Drehimpuls für reguläre Bahnen und mit beliebigem Chaotizitätsgrad konzipiert werden. Diese Überlegungen gelten auch für Pilzbillards mit dreieckigen Stämmen oder für solche, deren Hüte aus einem Kreissegment anstatt einem Halbkreis bestehen. Bei elliptischen Hüten [61, 62] kann es mehrere reguläre und chaotische Gebiete im Phasenraum geben, die aber immer noch klar voneinander getrennt sind, sofern der Stamm hinreichend tief ist⁵.

⁵Bei Pilzbillards mit eiförmigen Hüten können sich zusätzliche reguläre Bahnen zwischen der Ellipsenlinie und dem „Boden“ des Stammes ausbilden, wenn der Stamm nicht hinreichend tief ist. Dann geht die saubere Trennung des Phasenraums verloren.

4 Spektrale Eigenschaften von Quantenpilsbillards

Ausgehend von den besonderen Eigenschaften von Pilsbillards stellte sich die Frage, welche Eigenschaften *Quantenpilsbillards* besitzen und wie sich der getrennte Phasenraum in der Quantenmechanik manifestiert. In diesem Kapitel werden hierzu Experimente mit zwei supraleitenden Mikrowellenresonatoren sowie die Untersuchungen ihrer spektralen Eigenschaften vorgestellt. Abschließend werden nicht generische Eigenschaften durch die Analyse der periodischen Bahnen näher beleuchtet, wobei sich einige für Pilsbillards typische Eigenschaften herauskristallisieren.

4.1 Experiment

4.1.1 Konzeption der Resonatoren

Zur Untersuchung der Spektren von Pilsbillards wurden zwei Mikrowellenresonatoren angefertigt. Die Geometrien der Resonatoren sind in Abb. 4.1 gezeigt. Das Verhältnis von Stammbreite zu Radius beträgt $r/R = 2/3$ bzw. $r/R = 1/3$ für das große (a) bzw. kleine (b) Billard. Im Spektrum des Bunimovich-Stadionbillards wurde festgestellt, dass neutralstabile Bahnen zwischen den planparallelen Wänden, sog. bouncing ball orbits, zu nichtgenerischen Beiträgen in der Niveaudichte führen [48, 67, 68]. Um die Ausbildung solcher Bahnen zwischen den Wänden im Stamm der Pilsbillards zu unterbinden, wurden die Stämme dreieckanstatt rechteckförmig gewählt. Der Innenwinkel an der unteren Spitze beträgt $\pi/4$, weswegen keine Beugungseffekte an den inneren Ecken zu erwarten sind. An der Ecke, an der der Stamm mit dem Hut verbunden ist, lässt sich Beugung nicht vermeiden, wird aber als vernachlässigbar eingeschätzt, da der Winkel stumpf ist. Die beiden Geometrien entsprechen nach Anhang A Chaotizitätsgraden von $q_c = 0.829$ bzw. $q_c = 0.455$ für das große bzw. kleine Billard.

Jeder der beiden Resonatoren besteht aus einer Boden-, einer Deckel- und einer Konturplatte in der Mitte. Alle Platten sind aus 5 mm starkem, gewalztem, sau-

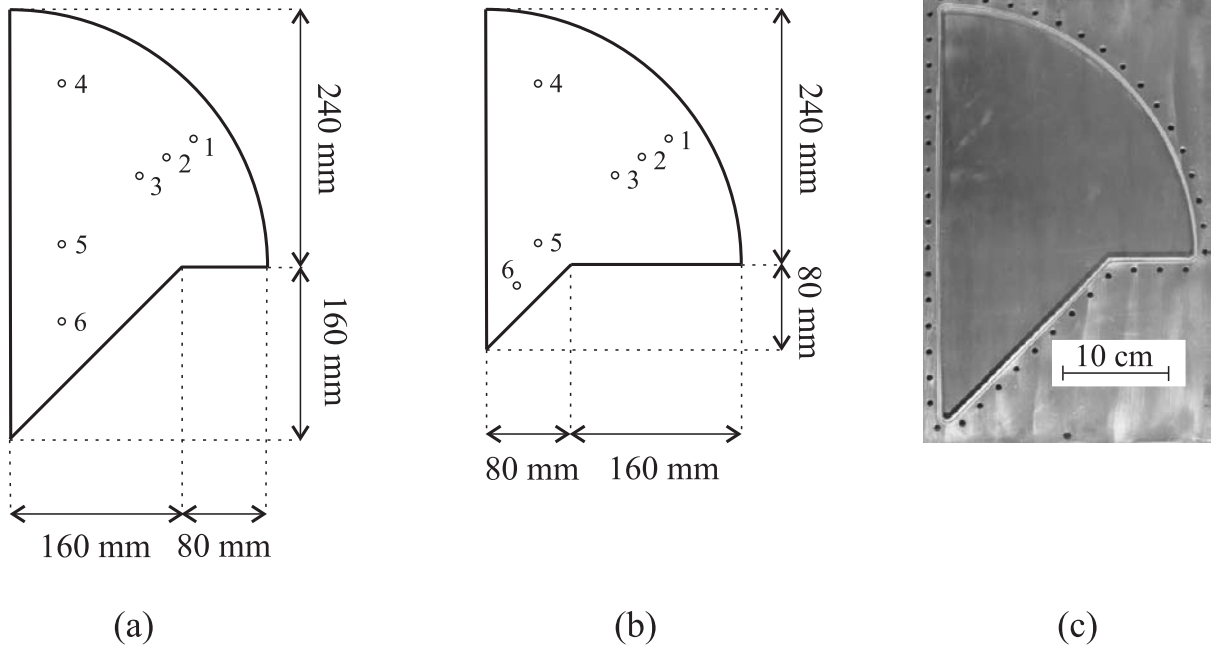


Abb. 4.1: Geometrie des großen (a) und kleinen (b) Pilzbillards. Die Kreise deuten die Positionen der verwendeten Antennen an. Ein Foto des geöffneten großen Resonators mit abgenommener Deckelplatte ist in (c) abgebildet.

erstoffarmen Kupfer gefertigt und wurden anschließend galvanisch mit einer Bleischicht von etwa $40 \mu\text{m}$ Dicke überzogen, um damit Messungen im supraleitenden Zustand zu ermöglichen. Die einzelnen Platten der Kavitäten wurden im Vorfeld des Experiments mit Aceton poliert, um sie von Verschmutzungen sowie einer dünnen Bleioxidschicht zu befreien. Zur besseren Leitfähigkeit zwischen den Platten wurde wie in [69] Lötzinndraht mit hohem Bleigehalt in dafür vorgesehene Nuten eingelassen. Der Draht füllt die Nuten gänzlich aus, und der über der Plattenoberfläche hinausragende Teil seines Querschnittes wird beim Verschrauben der Kavitäten zusammengepresst und sorgt für einen guten Kontakt aller Platten. Der Innenraum der Resonatoren erlangt damit eine Höhe von 6.5 mm . Nach Gl. (2.5) liegt daher die Grenzfrequenz, unterhalb der nur zweidimensionale Kavitätsmoden existieren, bei etwa 23.1 GHz . Die kleinen Kreise in Abb. 4.1(a) und (b) zeigen die Orte der Antennen an. Die Antennen ragen 0.5 mm in die Kavität hinein, was eine schwache und daher nahezu verlustfreie Ankopplung der Kavitäten an den Messapparat bedeutet. Abb. 4.1(c) zeigt ein Foto des großen Pilzbillards mit abgenommener Deckelplatte.

4.1.2 Experimenteller Aufbau

Zur Bestimmung der Frequenzspektren wurde an jedem der beiden Mikrowellenresonatoren eine Messung bei der Temperatur von 4.2 K durchgeführt, bei der sich das jeweilige Billard im supraleitenden Zustand befand. Der verwendete experimentelle Aufbau wird in Abb. 4.2 schematisch gezeigt und in [70] detailliert beschrieben. Die Kavität befindet sich in einem evakuierten, zylindrischen Kupfergefäß im Inneren eines Heliumkryostaten. Koaxialleitungen führen über Vakuumdurchführungen von den Antennen am Resonator im Inneren nach außen, wo durch Mikrowellenschalter in einem Aufbau ähnlich des in [71] beschriebenen

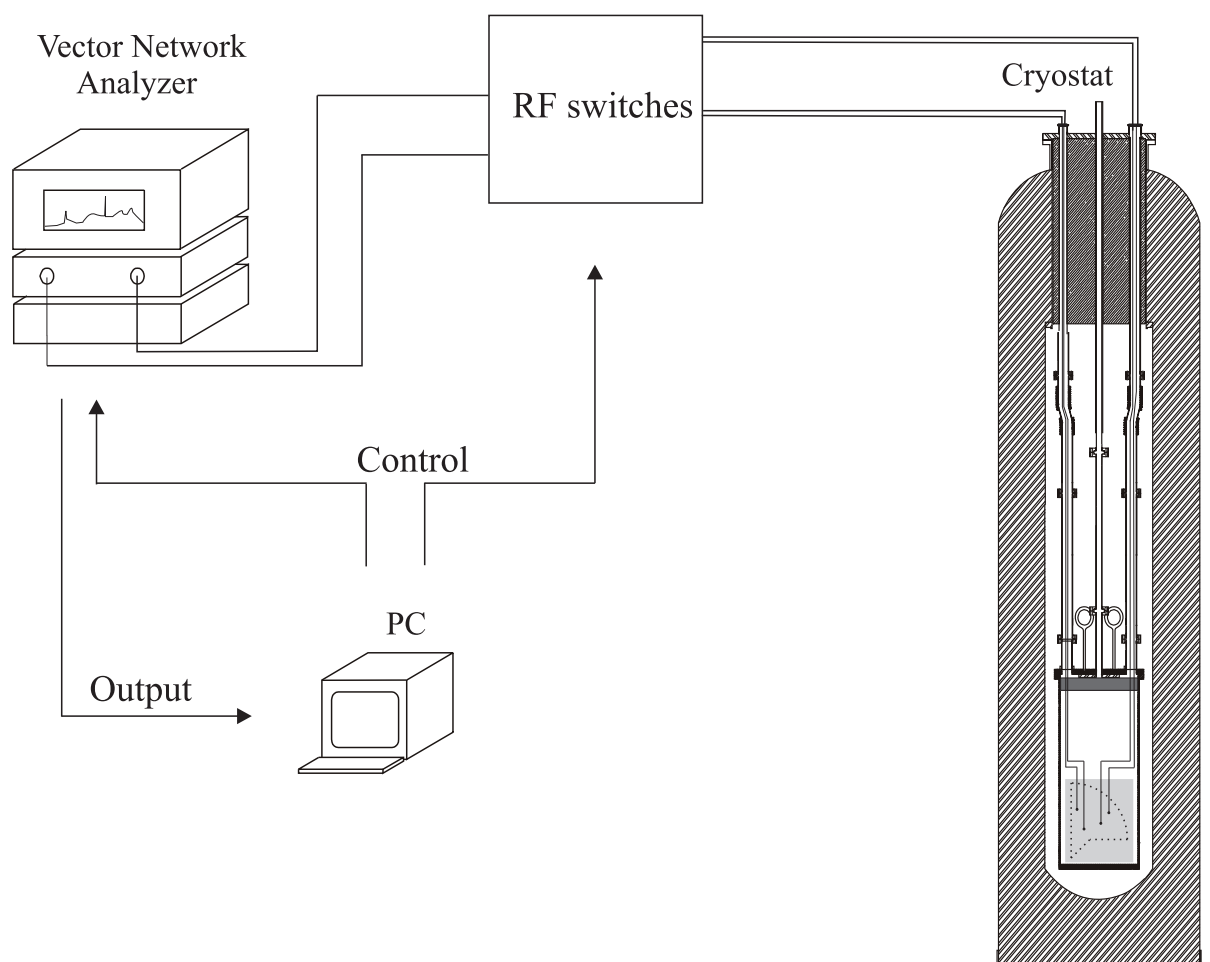


Abb. 4.2: Experimenteller Aufbau für Messungen an supraleitenden Mikrowellenkavitäten. Rechts im Bild befindet sich der Helium Kryostat. In ihm ist ein vakuumdichtes Kupfergefäß, in welchem sich das Billard befindet. Die Kabel sind über Mikrowellenschalter als Signalweiche mit einem vektoriellen Netzwerkanalysator verbunden. Die Steuerung und Datenauslese während der Messung geschieht mittels eines PCs.

die jeweils benutzten Antennen selektiert werden. Es können so Spektren von mehreren Antennenkombinationen aufgezeichnet werden. Die Ausgänge der Mikrowellenschalter sind an einen HP8510C Netzwerkanalysator angeschlossen, der bei den hier durchgeführten Transmissionsmessungen das empfangene Mikrowellensignal, welches aus der Kavität ausgekoppelt wird in Amplitude und Phase mit dem ausgesendeten Signal, welches in die Kavität eingekoppelt wird, vergleicht. Die Ansteuerung der Mikrowellenschalter, des Netzwerkanalysators sowie die Datenauslese von diesem wurde über den IEEE-488 Standard mit einem für diesen Zweck entwickelten Messprogramm vorgenommen. Der Kryostat wurde für die Messungen zunächst mit flüssigem Stickstoff auf 77 K vorgekühlt und anschließend mit flüssigem Helium geflutet, wodurch eine Temperatur von 4.2 K erreicht wird. Bei etwa 7.2 K wird Blei supraleitend, was in den Experimenten durch eine plötzliche Verringerung der Resonanzbreiten und gleichzeitiges Anwachsen der Resonanzamplituden zu beobachten ist.

4.1.3 Spektren und Extraktion der Eigenwerte

Mit dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren wurden die Spektren im Frequenzbereich von 45 MHz bis 23.3 GHz (22 GHz) für das große (kleine) Billard mit einer Schrittweite von 50 kHz für 12 (7) Antennenkombinationen aufgenommen. Die Messzeit betrug jeweils etwa 5 Stunden für jedes Spektrum einer Antennenkombination. Abbildung 4.3 zeigt einen Ausschnitt der Spektren des großen Pilzbillards im Bereich von 9 – 10 GHz für fünf der verwendeten Antennenkombinationen. Die Maxima im Spektrum zeigen die Eigenfrequenzen des Billards an, bei ihnen schwingt das elektromagnetische Feld im Resonator in Resonanz. Es ist hier schon zu erkennen, dass es Bereiche hoher Resonanzdichte gibt, die durch große Lücken voneinander getrennt sind. Dieses Phänomen wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch erklärt werden.

Da sich bei den Messungen die Resonatoren im supraleitenden Zustand befanden sind die einzelnen Resonanzen hinreichend schmal und gut getrennt, um einwandfrei identifiziert werden zu können. Im Messbereich bis 22 GHz wurden 938 Resonanzen für das große und 780 für das kleine Pilzbillard gemessen⁶. Es

⁶In den Spektren des großen Billards zeigte sich, dass bei 22.9 GHz die Niveaudichte stark anwächst. Dies deutet darauf hin, dass die Grenzfrequenz erreicht wurde, ab der dreidimensionale Moden existieren können. Sie wurde mit 23.1 GHz abgeschätzt.

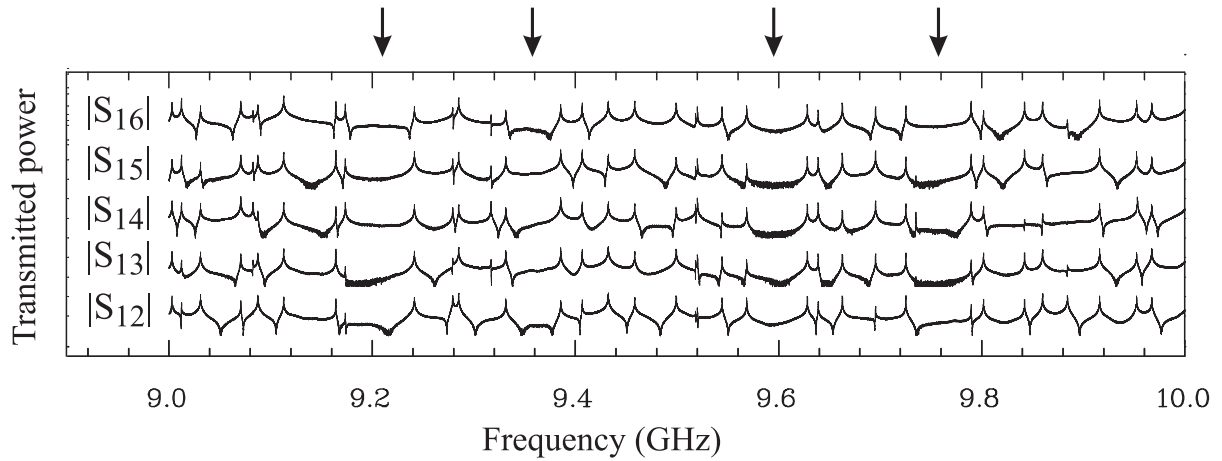


Abb. 4.3: Spektrum des großen Pilzbillards von 5 verschiedenen Kombinationen von Antennen in logarithmischer Skala. Zur Verdeutlichung wurden die einzelnen Spektren vertikal verschoben dargestellt. Es ist zu erkennen, dass es Bereiche mit hoher Eigenwertdichte sowie große Eigenwertlücken (Pfeile) gibt.

wurden hierzu mehrere Antennenkombinationen verwendet, da Resonanzen z. B. in einer bestimmten Antennenkombination nicht detektiert werden können, wenn eine Antenne in der Nähe einer Knotenlinie der elektrischen Feldverteilung positioniert ist.

4.2 Eigenwertstatistik

Die statistischen Eigenschaften der Eigenwerte von Systemen mit gemischter Dynamik zeigen eine Mischform der beiden Grenzfälle, dem GOE für chaotische Systeme und völliger Unkorreliertheit (Poissonsche Statistik) für reguläre Systeme. Es wurden viele Ansätze entwickelt, um diesen Übergang von Chaos zu Regularität zu modellieren [72]. Einer wurde von Berry und Robnik (BR) sowie gleichzeitig unabhängig von Bogomolny erarbeitet [73, 74]. Die BR-Statistik geht davon aus, dass erstens der Phasenraum der zu Grunde liegenden klassischen Dynamik klar in einen regulären und einen chaotischen Teil getrennt ist, und dass zweitens die Zustände, die zum regulären Teil gehören, mit denen des chaotischen Teils nicht korreliert sind, d. h. in keiner Weise wechselwirken. Die zweite

Annahme ist auch als Percivals Vermutung bekannt, denn Percival stellte in [75] eine Liste von Argumenten zusammen, die nahelegen, dass diese Hypothese im semiklassischen Limes gilt. Sind beide Annahmen erfüllt, zerfällt das Spektrum nach dem BR-Modell in zwei⁷ Teilspektren, von denen eines regulärer und das andere chaotischer Dynamik entspricht.

In Quantenpilsbillards ist – im Gegensatz zu anderen Billards – die erste Voraussetzung zur Anwendung der BR-Statistik erfüllt. Die zweite Annahme gilt jedoch nur näherungsweise: Während für klassische Teilchen die Grenze zwischen regulären und chaotischen Gebieten im Phasenraum eine unüberwindbare Barriere darstellt, findet in der Quantenmechanik ein „Übersprechen“ auf Grund der Unschärferelation statt. In Anlehnung an den Tunneleffekt der Quantenmechanik spricht man von *dynamischem Tunneln* [42]. Es liegt also in der Quantennatur, dass eine Wechselwirkung zwischen reuglären und chaotischen Komponenten stattfindet. Diese Überlegungen motivieren, die Spektren der Pilsbillards mit den Methoden von BR zu untersuchen.

In diesem Abschnitt werden die statistischen Eigenschaften der gemessenen Spektren der Pilsbillards entsprechend dem in [71] benutzten Vorgehen untersucht und mit den Vorhersagen von BR verglichen. Hierzu muss zunächst eine Entfaltungsprozedur durchgeführt werden, die die Eigenwerte auf einen konstanten mittleren Eigenwertabstand transformiert. Erst dann können Vergleiche mit den theoretischen Vorhersagen durchgeführt werden. Dabei unterscheidet man zwischen Korrelationen der Eigenwerte über kleine Frequenzabstände, wie z. B. die benachbarter Eigenwerte, und sog. langreichweitigen Korrelationen.

4.2.1 Entfaltung der Eigenwerte

Die Dichte der Eigenwerte steigt in einem mehrdimensionalen Quantensystem mit der Energie bzw. der Frequenz an. Die unterhalb einer Frequenz f erwartete Anzahl von Resonanzen eines zweidimensionalen Mikrowellenresonators ist nach der Weyl-Formel [76] durch

$$N_{\text{Weyl}}(f) = \frac{A\pi}{c^2} f^2 - \frac{L}{2c} f + C \quad (4.1)$$

⁷In [73] wurde das Modell allgemein für eine reguläre und beliebig viele chaotische Komponenten im Phasenraum dargestellt.

Tab. 4.1: Vergleich der Design-Geometrieparameter des großen und kleinen Pilzbillards mit den entsprechenden Größen aus einer Anpassung der Weyl-Formel (4.1) an $N(f)$.

Billard	Parameter	Designwert	Anpassung
groß	A (cm ²)	580.4	579.0 ± 0.4
	L (cm)	108.3	110.6 ± 1.9
	C	—	0.85 ± 0.20
klein	A (cm ²)	484.4	481.6 ± 0.4
	L (cm)	97.0	93.5 ± 2.3
	C	—	0.40 ± 0.24

gegeben. Hierin bezeichnen A die Fläche und L den Umfang des Resonators. Die Größe C ist eine geometrieabhängige Konstante, die von den Eckenwinkeln und Krümmungsradien der Billardgeometrie abhängt. Unter Variation der Parameter A , L und C wurde Gl. (4.1) an die experimentell bestimmte Treppenfunktion $N(f)$ angepasst. Tabelle 4.1 zeigt einen Vergleich der aus der Anpassung erhaltenen mit den tatsächlichen Geometrieparametern für beide Billards. Die angegebenen Fehler resultieren aus dem verwendeten Anpassungsverfahren (χ^2 -Minimierung). Die tatsächliche Abweichung von den realen Parametern kann größer sein, wenn $N(f)$ starke lokale Fluktuationen im Vergleich zur Weyl-Formel zeigt.

Die physikalische Information über die Dynamik des Systems findet sich in den Fluktuationen der Niveaunzahl um die nach der Weyl-Formel Gl. (4.1) erwartete. Abbildung 4.4 zeigt den fluktuierenden Anteil der Niveaunzahl $N_{\text{fluc}}(f) = N(f) - N_{\text{Weyl}}(f)$. Wäre irgendwo in der Auswertung ein Eigenwert übersehen worden, würde diese Größe bei der entsprechenden Frequenz einen Sprung von 1 zeigen. Somit konnte sichergestellt werden, dass alle Eigenwerte im betrachteten Frequenzfenster gefunden wurden. Sowohl für das große als auch für das kleine Billard sind schnelle Oszillationen mit Frequenzen in der Größenordnung von 0.5 GHz zu erkennen. Während die Amplituden dieser Oszillationen beim kleinen Billard eher unregelmäßig verteilt sind, folgen sie beim großen – abgesehen von

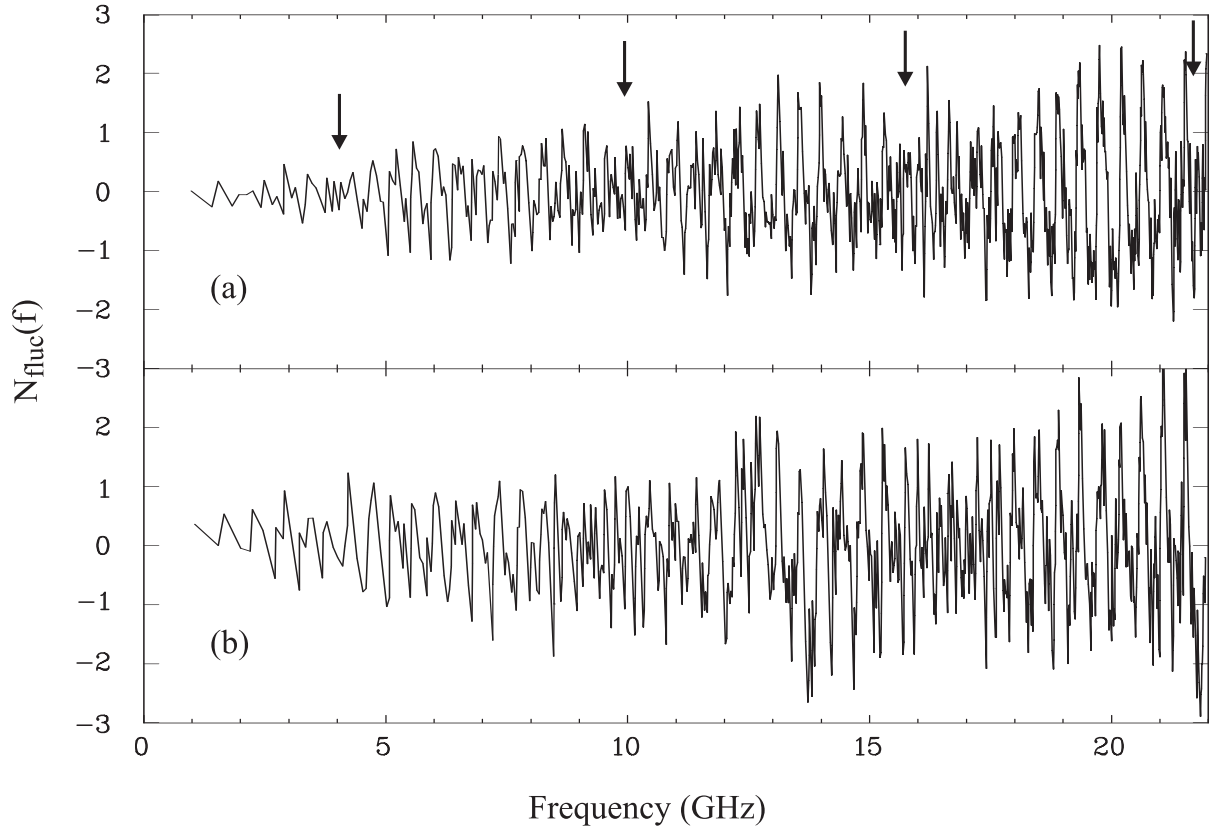


Abb. 4.4: Fluktuierender Anteil der Anzahl beobachteter Niveaus für das große (a) und kleine (b) Billard. Es sind schnelle Oszillationen in der Größenordnung von 0.5 GHz zu erkennen. Beim großen Pilzbillard folgen deren Amplituden einer Einhüllenden. Man beobachtet eine Schwebung (und einen stochastisch fluktuierenden Untergrund), deren Knotenpunkte durch Pfeile angedeutet sind.

einem zusätzlichen Rauschen – einer Einhüllenden. Ihre Ursache wird später im Zusammenhang mit den periodischen Bahnen des Systems erklärt werden.

Um im Folgenden die spektralen Eigenschaften mit den statistischen Vorhersagen der Zufallsmatrixtheorie vergleichen zu können, muss man zunächst die Frequenzskala derart umeichen, dass der mittlere Eigenwertabstand der Resonanzen 1 beträgt. Dies geschieht durch die Transformation

$$\epsilon_i = N_{\text{Weyl}}(f_i) , \quad (4.2)$$

wobei f_i die Frequenz des i -ten Eigenwertes und ϵ_i die entsprechende einheitenlose entfaltete Frequenz bezeichnet.

4.2.2 Eigenwertkorrelationen

Die wohl am meisten studierte statistische Eigenschaft von Quantenspektren ist die Verteilung der Abstände s_i benachbarter Eigenwerte ϵ_{i+1} und ϵ_i . Bei regulären Systemen sind im semiklassischen Limes die Eigenwerte nicht miteinander korreliert. Die zugehörige Abstandsverteilung (nearest neighbor distribution, NND) folgt daher

$$P_r(s) = \exp(-s) . \quad (4.3)$$

Systeme, die der GOE-Statistik unterliegen, zeigen hingegen eine kompliziertere Abstandsverteilung, die jedoch durch die Wigner-Verteilung

$$P_c(s) = \frac{\pi}{2}s \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right) . \quad (4.4)$$

sehr gut angenähert wird [35]. Für gemischte Systeme ergibt die BR-Statistik auf Grund von Gln. (4.3) und (4.4)

$$P_{\text{BR}}(s) = \frac{d^2(E_r(q_r s)E_c(q_c s))}{ds^2} \quad (4.5)$$

mit $q_r = 1 - q_c$. Die Funktionen

$$E_r(s) = \exp(-s) \quad (4.6)$$

bzw.

$$E_c(s) = \text{erfc}\left(\sqrt{\pi}s/2\right) \quad (4.7)$$

geben die Wahrscheinlichkeit an, keinen Eigenwert in einem zufällig ausgewählten Intervall der Länge s zu finden. Sie kommen in Gl. (4.5) als einfaches Produkt vor, worin sich die Unabhängigkeit der Teilspektren widerspiegelt.

Da zur Bestimmung der Abstandsverteilung als Histogramm ausgehend von experimentellen Daten die Einordnung der Abstände s_i in Bins notwendig ist, geht Information verloren. Dies kann man umgehen, indem man die integrierte Abstandsverteilung (INND)

$$I(s) = \int_0^s P(s')ds' \quad (4.8)$$

betrachtet.

Abbildung 4.5 zeigt Abstandsverteilungen sowie die integrierten Verteilungen der experimentell erhaltenen Eigenwerte für beide Billards für den vollen (50. – 938.

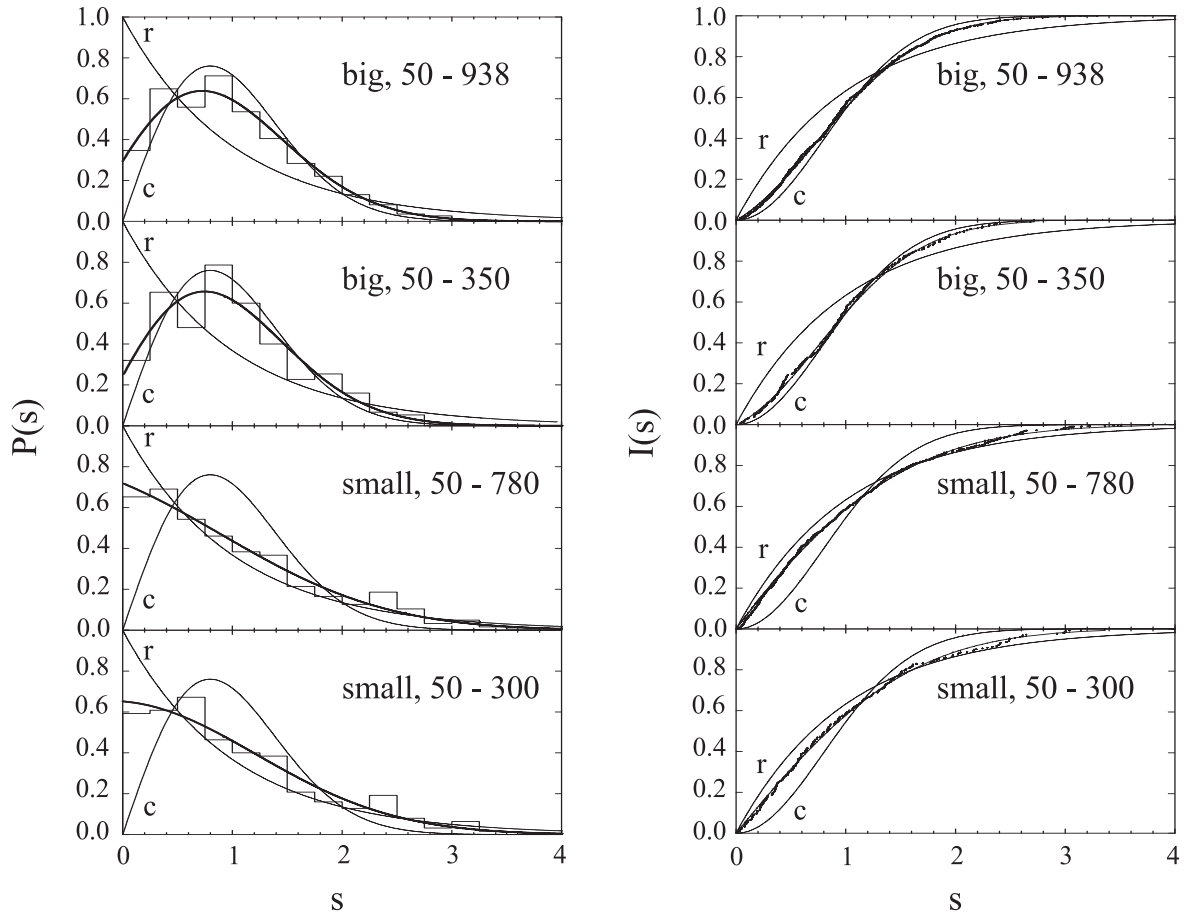


Abb. 4.5: Abstandsverteilungen benachbarter Eigenwerte (links) sowie die zugehörigen integrierten Abstandsverteilungen (rechts) für das große und kleine Pilzbillard. Die gezeigten Verteilungen beziehen sich auf den gesamten (50. – 938. bzw. 50. – 780. Eigenwert) sowie auf den unteren Teil des Spektrums (50. – 350. bzw. 50. – 300. Eigenwert). Die limitierenden Kurven für völlig reguläre (r) und chaotische (c) Dynamik sowie eine nach dem BR-Modell angepasste Kurve sind ebenfalls eingezeichnet.

bzw. 50. – 780. Eigenwert) und den unteren (50. – 350. bzw. 50. – 300. Eigenwert) Frequenzbereich. Es ist gängige Praxis, die niedrigsten Eigenwerte nicht mit zu berücksichtigen, da bei ihnen auf Grund der großen Wellenlänge keine Übereinstimmung mit universell gültigen Modellen erwartet werden kann. In allen Graphen sind Kurven für die beiden Grenzfälle regulärer und chaotischer Dynamik sowie die beste Anpassung des BR-Modells Gl. (4.5) an die integrierte Abstandsverteilung Gl. (4.8) der gemessenen Daten eingezeichnet. Man erkennt, dass die experimentell gefundenen Abstandsverteilungen tatsächlich zwischen den limitierenden Kurven für reguläre und chaotische Dynamik zu finden sind. Ta-

Tab. 4.2: Vergleich der Designwerte des Chaotizitätsparameters q_c mit denen, die aus den experimentellen INND, Σ^2 und Δ_3 Statistiken mit dem BR-Modell bestimmt wurden. Die Auswertungen wurden für beide Pilzbilards jeweils für den vollen Spektralbereich (außer den ersten 50 Eigenwerten) sowie für drei zusammenhängende Teilbereiche durchgeführt. Das Experiment reproduziert die Designwerte bis auf einige Prozent, überschätzt sie jedoch trendmäßig.

Billard	q_c^{Design}	Bereich	q_c^{INND}	$q_c^{\Sigma^2}$	$q_c^{\Delta_3}$
groß	0.829	50 – 938	0.84 ± 0.02	0.87 ± 0.06	0.89 ± 0.07
		50 – 350	0.87 ± 0.09	0.89 ± 0.18	0.91 ± 0.20
		350 – 650	0.83 ± 0.09	0.86 ± 0.18	0.86 ± 0.20
		650 – 938	0.81 ± 0.09	0.85 ± 0.18	0.88 ± 0.20
klein	0.455	50 – 780	0.53 ± 0.03	0.58 ± 0.08	0.52 ± 0.07
		50 – 300	0.59 ± 0.09	0.61 ± 0.19	0.58 ± 0.20
		300 – 550	0.45 ± 0.09	0.48 ± 0.19	0.42 ± 0.20
		550 – 780	0.54 ± 0.09	0.59 ± 0.19	0.55 ± 0.20

belle 4.2 zeigt die daraus ermittelten Chaotizitätsparameter q_c im Vergleich mit den Designwerten. Die mit dem BR-Modell bestimmten Werte für q_c stimmen, besonders für das große Pilzbillard, bis auf einige Prozent mit den Designwerten überein. In der Tabelle finden sich ebenfalls die Parameter, die auf Grund des BR-Modells für die Σ^2 - und Δ_3 Statistik [77] ermittelt wurden. Diese Statistiken messen die langreichweitigen Korrelationen der Eigenwerte. Auch hier zeigt sich im wesentlichen Übereinstimmung.

In der Tabelle ist der Trend zu erkennen, dass nahezu in allen Fällen der extrahierte Chaotizitätsparameter größer als der Designwert ist. Hierfür scheinen zwei Gründe plausibel: Einerseits ist die Fertigungsgenauigkeit der Resonatoren begrenzt. Kleine Störungen der Berandung können bereits zur Zerstörung regulärer Bahnen führen, wodurch sich der Chaotizitätsgrad erhöht. Andererseits wurde bei der bisherigen Analyse die Existenz diffraktiver Bahnen nicht berücksichtigt.

Da die Pilzbillards jedoch eine diffraktive Ecke besitzen, gibt es solche. Die spektralen Eigenschaften regulärer Systeme mit Diffraction folgen der sogenannten Semi-Poisson-Statistik [78], die ebenfalls eine Zwischenstufe zwischen regulärer und chaotischer Dynamik beschreibt. Auch diese Beiträge verursachen demnach einen scheinbar höheren Anteil chaotischer Dynamik.

Die gute Datenlage ermöglicht es, eine weitaus feinere Bineinteilung für die Auftragungen der NND zu wählen als in Abb. 4.5 geschehen. Abbildung 4.6 zeigt die Abstandsverteilungen für den vollen Spektralbereich (50. – 938. bzw. 50. – 780. Eigenwert) des großen und kleinen Pilzbillards. Für kleine Eigenwertabstände

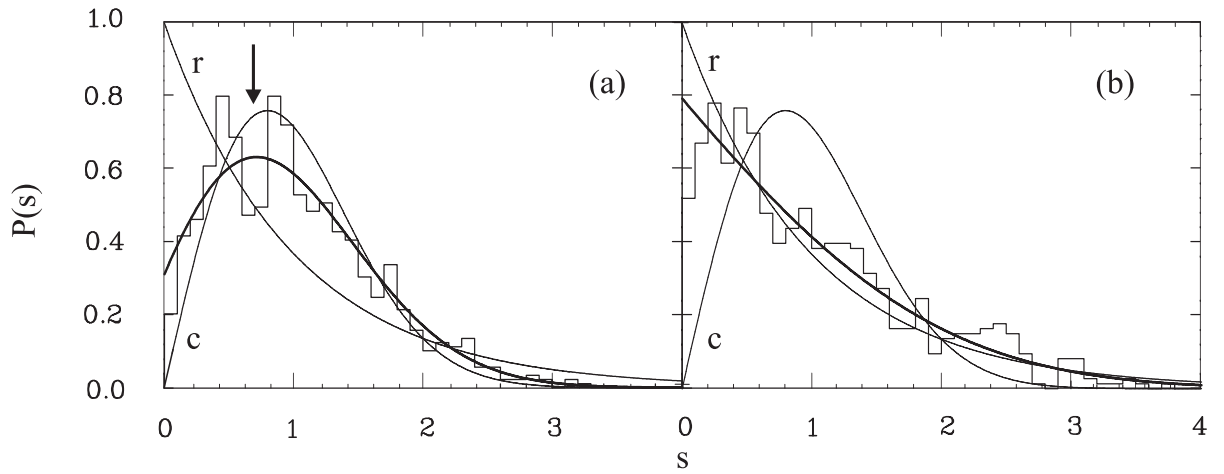


Abb. 4.6: Abstandsverteilungen für das große (a) und kleine (b) Pilzbillard (50. – 938. bzw. 50. – 780. Eigenwert) mit einer schmalen Binbreite von $\Delta s = 0.1$. Für kleine s ist zu erkennen, dass die angepasste BR-Verteilung die experimentellen Daten überschätzt. Der Einbruch (Pfeil) um $s = 0.7$ der Verteilung des großen Billards ist statistisch signifikant und kommt in allen Frequenzbereichen vor.

beschreibt die Anpassung die Daten nicht gut, die Verteilung wird überschätzt. Die Niveauabstoßung ist also größer, als es das Modell vorhersagt. Dies liegt daran, dass der reguläre Teil des Spektrums mit dem chaotischen über dynamisches Tunneln wechselwirkt. Abweichungen dieser Art wurden bereits in mehreren Arbeiten untersucht [79]. Ähnlich wie in [66] konnte am vorliegenden System also nicht die Vermutung bestätigt werden, dass gemischte Systeme besser durch das BR-Modell beschrieben werden, wenn der zu Grunde liegende klassische Phasenraum exakt getrennt ist.

Eine zweite Abweichung zeigt die NND des großen Billards in Form eines Einbruchs im Bereich um $s = 0.7$. Diese Struktur ist statistisch signifikant und wurde in allen drei untersuchten Teilbereichen des Spektrums (50. – 350., 350. – 650. und 650. – 938. Eigenwert) gefunden. In der NND des kleinen Billards wurde keine signifikante Struktur gefunden. Der physikalische Grund für den Einbruch konnte durch die Analyse der periodischen Bahnen des Systems gefunden werden und wird in Abschnitt 4.4 erläutert.

4.3 Längenspektren

4.3.1 Identifikation periodischer Bahnen

Die Theorie periodischer Bahnen besagt, dass sich jedes Quantenspektrum im semiklassischen Limes mittels einer Spurformel

$$\rho_{\text{fluc}}(k) \propto \sum_i \mathcal{A}_i \cos(kx_i - \varphi_i) \quad (4.9)$$

als eine Summe über periodische Bahnen mit Länge x_i des klassischen Systems schreiben lässt. Hierbei ist $\rho_{\text{fluc}}(k)$ der fluktuierende Teil der Niveaudichte, $k = 2\pi f/c$ die Wellenzahl, und \mathcal{A}_i und φ_i sind Amplitude und Phase, die von der Stabilität und der Topologie der Bahn i (Multiplizität, konjugierte Punkte, etc.) abhängen. Um umgekehrt die relevanten Bahnen in gemessenen Spektren zu identifizieren, muss die Niveaudichte in den Längenraum transformiert werden. Wie bereits bei der Entfaltungsprozedur wird hierzu nur der fluktuierende Anteil der Niveaudichte berücksichtigt. Unter dem Längenspektrum versteht man den Betrag der Größe

$$\tilde{\rho}_{\text{fluc}}(x) = \int_0^{f_{\text{max}}} \rho_{\text{fluc}}(f) \exp(2\pi i f x/c) df . \quad (4.10)$$

Maxima im Längenspektrum bei der Länge x korrespondieren zu periodischen Bahnen im Billard mit dieser Länge. Abbildung 4.7 zeigt die Längenspektren der beiden Billards. Periodische Bahnen sind Bahnen, die im Poincaré-Schnitt nach einer festen Anzahl von Iterationen auf sich selbst abgebildet werden. Um sie systematisch zu suchen, wurde daher ein Programm entwickelt, welches nach

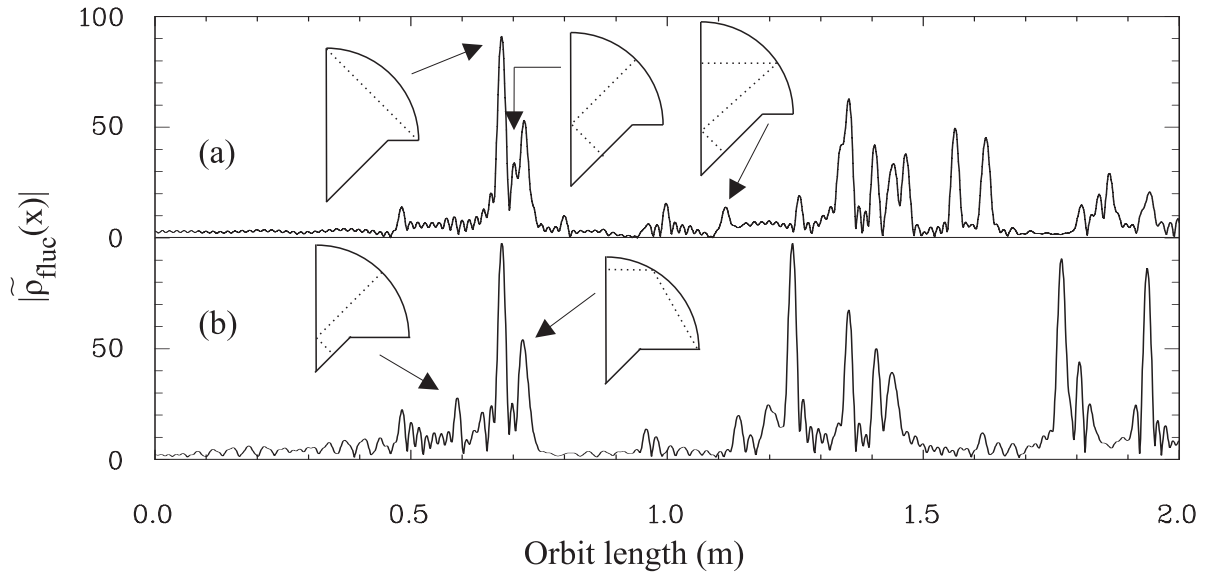


Abb. 4.7: Längenspektren des großen (a) und kleinen (b) Pilzbillard. Den Maxima entsprechen periodische Bahnen des jeweiligen Systems, einige von diesen sind eingezeichnet. Die Bahnen mit den Längen $x = 0.68$ m und 0.72 m kommen in beiden Billards vor und entsprechen den Viereck- und Sechseckbahnen in einem vollen Kreisbillard.

Punkten in der Poincaré-Abbildung des Billards sucht, die unter einer vorgegebenen Zahl von Iterationen (=Reflexionen) auf sich selbst abgebildet werden. Somit konnten den meisten Maxima in der Abbildung periodische Bahnen zugeordnet werden, einige von diesen sind eingezeichnet. Manche reguläre Bahnen mit hinreichend großer Kaustik kommen in beiden Billards vor. So finden sich z. B. die stark ausgeprägten Maxima bei $x = 0.68$ m und $x = 0.72$ m in beiden Längenspektren. Ergänzt man den Viertelkreis im Pilzbillard zum Vollkreis, entsprechen die zugehörigen Bahnen gerade der Viereck- und Sechseckbahn.

Reguläre Bahnen im Hut des Pilzbillards können allgemein an den geraden Berandungsstücken nach dem Spiegelprinzip [80] zu Bahnen in einem Vollkreis ergänzt werden. Es ergeben sich die Polygon- und Sternbahnen wie im Kreisbillard. Besitzt eine Bahn im Kreisbillard eine gerade Eckenzahl, wird sie im Pilzbillard bereits nach der Hälfte der Bahnlänge auf sich selbst abgebildet und besitzt daher die halbe Länge gegenüber im Vollkreis. Deswegen findet sich zwischen der Viereck- und Sechseckbahn im Längenspektrum der Pilzbillards *nicht* die Fünfeckbahn.

4.3.2 Vergleich mit dem Kreisbillard

Da der Phasenraum eines Pilzbillards klar getrennt ist, sollte der reguläre Anteil seines Spektrums allein durch die regulären Bahnen des Pilzbillards beschreibbar sein. Letztere sind auch im Kreisbillard zu finden. Mittels einer geeigneten Spurformel der Gestalt aus Gl. (4.9) sind dabei nur solche Bahnen des Kreisbillards zu berücksichtigen, die auch im Pilzbillard vorkommen, d. h. solche mit einem Drehimpuls der größer als die minimal mögliche Kaustik mit Radius r ist (vgl. Abschnitt 3.1). Gleichmaßen sollte aber auch der umgekehrte Weg, aus den Eigenfunktionen des Kreisbillards mit einem Mindestdrehimpuls den regulären Beitrag zum Längenspektrum eines Pilzbillards zu rekonstruieren, gangbar sein. Diese Idee wird in diesem Abschnitt verfolgt.

Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für ein Kreisbillard mit Radius R kann in Polarkoordinaten (\tilde{r}, φ) separiert werden und hat die Lösungen:

$$\psi_{nm} = J_m(k_{mn}\tilde{r}) \begin{cases} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{cases} \quad (4.11)$$

Hierbei ist J_m die Besselfunktion m -ter Ordnung, und k_{mn} bezeichnet die Eigenwerte, die durch die Randbedingung

$$J_m(k_{mn}R) = 0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

festgelegt sind. Die radialen und azimuthalen Quantenzahlen sind mit $n = 1, 2, \dots$ bzw. $m = 0, 1, \dots$ bezeichnet. Abbildung 4.8 zeigt schematisch einige Feldbilder des Vollkreises für kleine Quantenzahlen. Die Zustände für $m > 0$ sind alle zweifach entartet. Im Halbkreis ist diese Entartung aufgehoben, und alle $m = 0$ Moden können auf Grund der geänderten Randbedingungen nicht existieren. Beim Viertelkreis gibt es sogar nur Moden mit geradem m und $m > 0$.

Von allen möglichen Moden im Viertelkreis sind für das Pilzbillard nur diejenigen relevant, deren Drehimpulsquantenzahl hinreichend groß ist, so dass die Wellenfunktion im Pilzbillard außerhalb der kleinstmöglichen Kaustik lokalisiert ist. Der quantenmechanische Drehimpuls kann mit dem eines Teilchens auf einer klassischen Bahn mittels

$$L = m\hbar = \tilde{r}p = \tilde{r}\hbar k_{nm} \quad (4.13)$$

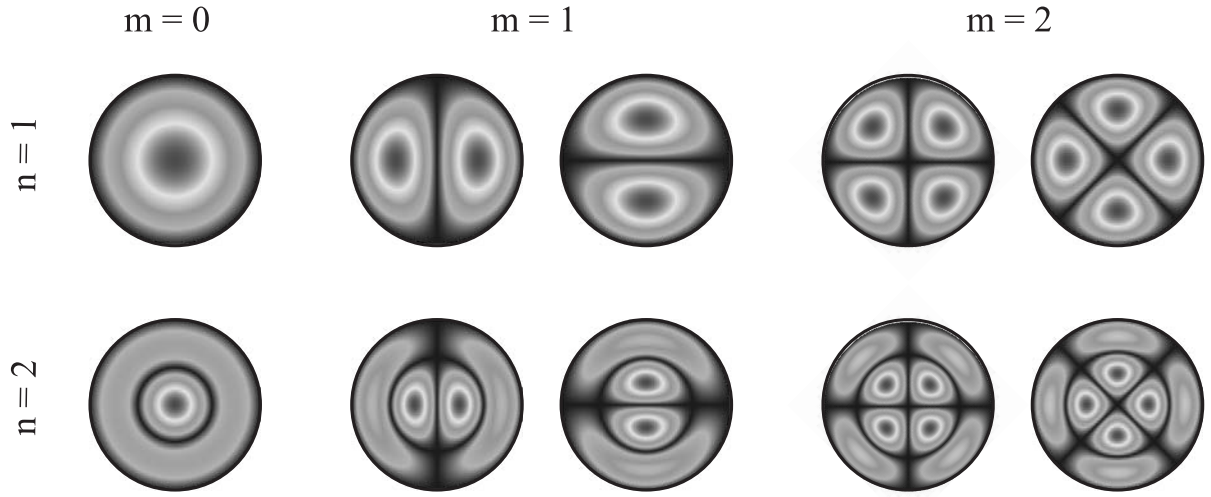


Abb. 4.8: Intensitätsverteilungen von Eigenmoden im Kreisbillard. Den Funktionen kann man eine radiale und eine azimuthale Quantenzahl n und m zuordnen. Alle Moden mit $m > 0$ sind zweifach entartet.

identifiziert werden. Dabei sind \tilde{r} der Abstand der Bahn zum Kreiszentrum und p der Impuls des Teilchens. Aus der obigen Überlegung ergibt sich mit der Lokalisierungsbedingung $\tilde{r} > r$ die transzendente Ungleichung

$$m > rk_{nm}. \quad (4.14)$$

Für jedes n gibt es ein minimales m , ab dem die Moden des Viertelkreises im desymmetrisierten Pilzbillard zu finden sind.

Es wurden mit Gl. (4.12) alle Moden des Viertelkreisbillards im betrachteten Frequenzbereich berechnet und anschließend daraus die nach der Auswahlregel Gl. (4.14) erlaubten Moden selektiert. Abbildung 4.9 zeigt den Vergleich des Längenspektrums des großen⁸ Pilzbillards mit dem der verbleibenden Kreismoden. Es werden die Maxima der regulären Bahnen in Ort und näherungsweise auch in Amplitude reproduziert, die chaotischen wie erwartet nicht. Mit dieser Methode kann man also in den gemessenen Daten reguläre von chaotischen Bahnen unterscheiden. Dies bedeutet, dass die Trennung des Spektrums in einen regulären und einen chaotischen Teil sinnvoll ist.

Die hierzu verwendete Identifikation von Moden im Pilzbillard und Kreismoden ist in zweierlei Hinsicht eine – dennoch gute – Näherung:

⁸Die entsprechende Abbildung für das kleine Pilzbillard wird an dieser Stelle nicht gezeigt, da sie qualitativ die selben Ergebnisse enthält.

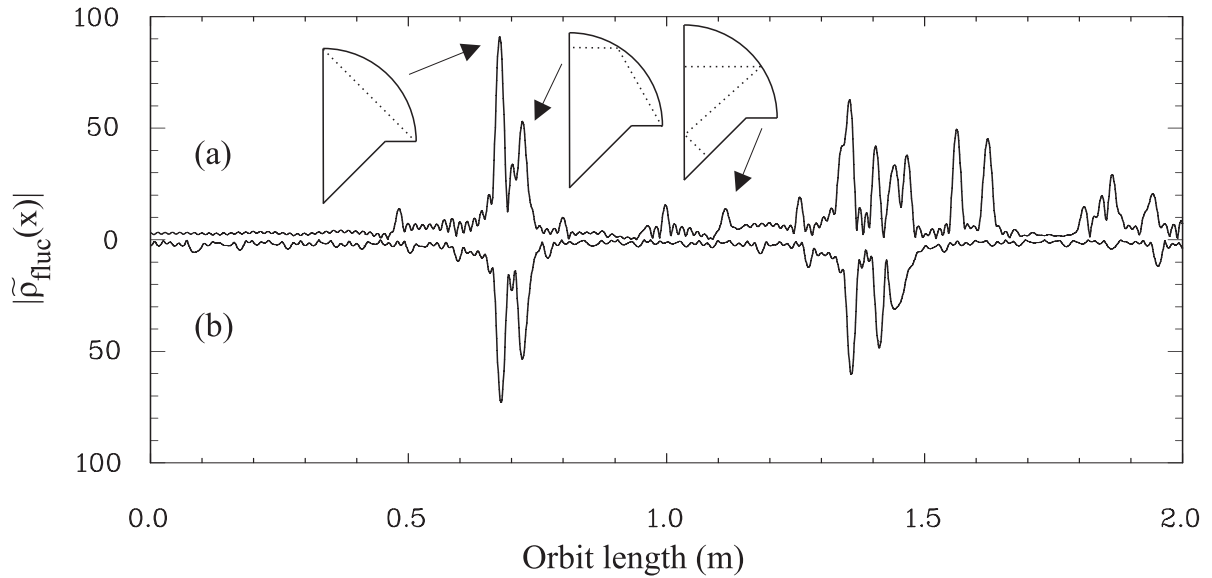


Abb. 4.9: Vergleich des Längenspektrums des großen Pilzbillards (a) wie in Abb. 4.7(a) mit dem Längenspektrum der Moden eines Viertelkreisbillards (b), die in einem Kreisring außerhalb der kleinsten Kaustik im Pilzbillard lokalisiert sind (nach unten abgetragen). Die Maxima, die zu regulären Bahnen im Pilzbillard korrespondieren, werden in Ort und Amplitude durch das Spektrum der selektierten Kreismoden reproduziert.

- Der klassische Drehimpuls einer Teilchenbahn bezüglich des Kreismittelpunkts legt die Kaustik der Bahn fest. Nur außerhalb dieser Kaustik ist das Teilchen zu finden. Die quantenmechanische Wellenfunktion hingegen ist im ganzen Konfigurationsraum verteilt. Die Kaustik stellt also hier keine scharfe Grenze für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens dar, sondern charakterisiert lediglich seine Lokalisierung.
- Die tatsächlichen Eigenmoden im Pilzbillard können nicht identisch mit denen des Kreisbillards sein, da die Wellenfunktion im Stamm nicht überall gleichzeitig verschwinden darf. Also wird auch die Wellenfunktion im Hut des Pilzes durch die Anwesenheit des Stammes beeinträchtigt sein. In Kap. 5 wird auf Grund gemessener Wellenfunktionen gezeigt, dass die Eigenfunktionen, die zu Kreismoden korrespondieren, über dynamisches Tunneln ein wenig in den Stamm hineinragen.

4.4 Dominante periodische Bahnen

Im großen Billard spielen die Viereck- und Sechseckbahn eine sehr dominante Rolle: sie gehören zu den kürzesten Bahnen, besitzen beträchtliche Amplituden und sind von anderen Bahnen mit großen Amplituden isoliert. Daher sind sie auch für die wichtigsten systemspezifischen und damit nicht generischen Eigenschaften des Systems verantwortlich. Die in diesem Abschnitt behandelte Analyse der periodischen Bahnen erlaubt es, die weiter oben dargestellten Fluktuationen in N_{fluc} sowie den Einbruch in der NND des großen Billards zu verstehen. Im kleinen Billard wurden diese Eigenschaften nicht beobachtet. Man kann dies auf die Existenz einer chaotischen Bahn zurückführen, die kürzer als die Viereck- und Sechseckbahn ist (vgl. Abb. 4.7). Obwohl sie eine geringere Stabilität besitzt, trägt sie maßgeblich zu den systemspezifischen Eigenschaften bei und mindert den relativen Einfluss der Viereck- und Sechseckbahn. Die folgenden Auswertungen beziehen sich daher nur auf das große Billard, sind aber allgemein gültig für alle Pilzbillards, deren Stämme hinreichend breit sind.

Um den Einfluss der beiden dominanten Bahnen auf die spektralen Eigenschaften zu verstehen, wurde zunächst ihr Beitrag zur Niveauanzahl entfernt. Aus $\tilde{\rho}_{\text{fluc}}(x)$ wurden hierzu die Längen der Bahnen sowie die Amplituden und Phasenlagen der entsprechenden Maxima im Längenspektrum bestimmt. Der oszillierende Anteil der Niveauanzahl $N_{\text{osc}}(\epsilon)$ auf der entfalteten Frequenzskala ist mit diesen Informationen bekannt. In Abb. 4.10 ist ein kleiner Ausschnitt des entfalteten Spektrums mit dem Beitrag der zu extrahierenden Bahnen gezeigt. Die Eigenwerte folgen klar dem Trend der beiden Bahnen – ein weiterer Hinweis für deren Wichtigkeit. Zur Extraktion dieser Bahnen aus dem Spektrum wurde die in Anhang B hergeleitete Vorschrift benutzt.

4.4.1 Superschalen in Pilzbillards

In Abschnitt 4.2.1 wurde beobachtet, dass der fluktuierende Anteil der Niveauanzahl eine Schwebung zeigt. Diese wird durch die Existenz der benachbarten, dominanten Viereck- und Sechseckbahn verstanden: Es ist bekannt, dass zwei benachbarte δ Funktionen im Fourierraum eine Schwebung bewirken – genau dieser Effekt wird hier beobachtet. Die restlichen Bahnen sorgen für den fluktuierenden

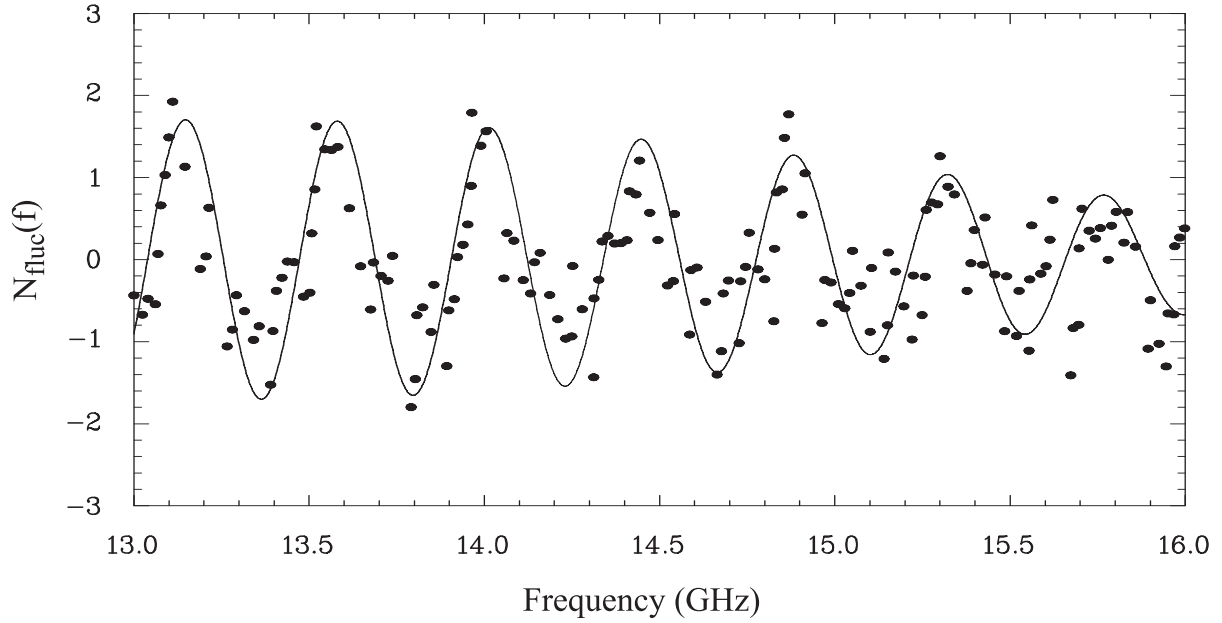


Abb. 4.10: Fluktuierender Anteil der Anzahl beobachteter Eigenwerte im Frequenzbereich 13 – 16 GHz. Die durchgezogene Kurve beschreibt den Beitrag der dominanten Bahnen. Die Eigenwerte fluktuieren um die Kurve.

Untergrund, der als „Störungen“ der Schwebung zu beobachten ist. Um dieses Bild zu bestätigen, wurde zunächst geprüft, ob die Periodenlänge der kurzen sowie einhüllenden Oszillationen im Frequenzraum den Abständen der beiden Maxima im Längenspektrum entspricht. Außerdem wurde der fluktuierende Anteil der Niveauanzahl aufgetragen (siehe Abb. 4.11), nachdem er von den Beiträgen der beiden dominanten Bahnen befreit wurde. Tatsächlich ist keine Schwebung mehr zu erkennen. Es bleiben jedoch Reste der schnellen Oszillationen zu sehen, was man auf die Existenz harmonischer Bahnen mit einem Vielfachen ihrer Länge zurückführen kann – diese wurden nicht extrahiert.

Die *schnellen Oszillationen* in dem oberen Teil von Abb. 4.11 stellen eine Schalenstruktur dar. Die Schalenabschlüsse sind durch große Lücken zwischen benachbarten Eigenwerten gekennzeichnet, was bereits im Rohspektrum (Abb. 4.3) zu sehen ist. Die *Einhüllende* der Oszillationen formieren sog. *Superschalen*. Sie wurden bereits in vielen verschiedenen Quantensystemen wie Metallclustern [81], Atomkernen [82], Nanodrähten [83] oder verdünnten gefangenen Fermigasen [84] nachgewiesen und konnten wie hier auf die Interferenz benachbarter dominanter Bahnen in sphärischen Geometrien zurückgeführt werden.

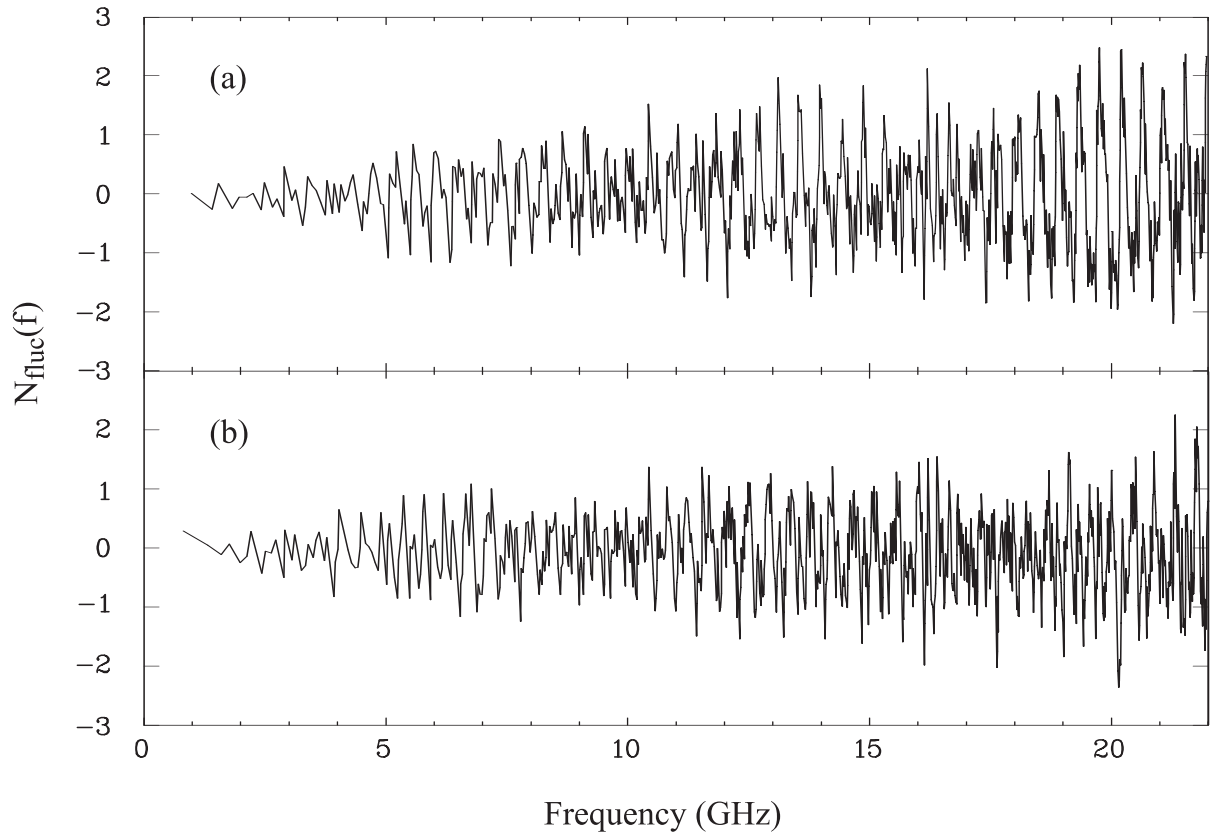


Abb. 4.11: Superschalen im fluktuierenden Anteil der Niveauanzahl des großen Pilzbillards (a) wie in Abb. 4.4(a). Durch Abziehen der Beiträge der dominanten Viereck- und Sechseckbahn verschwinden die Oszillationen (b) – sie sind also für die Schwebung verantwortlich.

Pilzbillards sind in diesem Zusammenhang ein ideales System zur weiteren Untersuchung von Schalenstrukturen. Zwei Möglichkeiten erscheinen hier interessant:

- Durch Variation der Stammtiefe kann die Chaotizität des Billards variiert werden. Die Niveauanzahl setzt sich aus Beiträgen der Superschalen sowie der Restfluktuationen zusammen, deren relative Gewichtung variiert werden kann. Dadurch kann mit Pilzbillards der Einfluss von Superschalen auf das Spektrum unter Einfluss von Chaos gezielt untersucht werden.
- In der Kernphysik wurden bereits im Rahmen des Nilsson Modells [17] die Entwicklung der Zustände hin zu deformierten Kernen betrachtet. Dies ist auch hinsichtlich der Schalenstruktur von Interesse [85]. Pilzbillards mit elliptischen Hüten erlauben es, die Entwicklung von Superschalen bei beliebigen Deformationen zu untersuchen.

4.4.2 Struktur in der Abstandsverteilung benachbarter Eigenwerte

Nach der Extraktion der beiden dominanten Bahnen verschwindet nicht nur die Superschalenstruktur aus dem Spektrum, sondern auch der Einbruch in der NND der Eigenwerte. Abbildung 4.12 zeigt nochmals die NND mit einer feinen Binbreite sowie die NND des von den Bahnen bereinigten Spektrums. Der Cha-

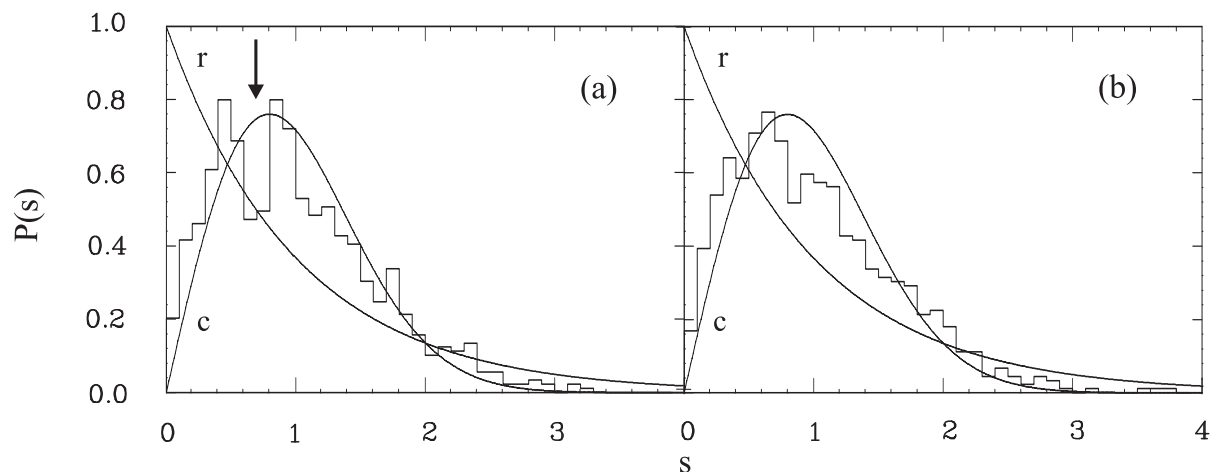


Abb. 4.12: Vergleich der Abstandsverteilungen der Eigenwerte des großen Billards (vgl. Abb. 4.6(a)) mit (a) und ohne (b) Beiträge der Vier- und Sechseckbahnen. Der charakteristische Einbruch (Pfeil) wird offensichtlich von den beiden Bahnen verursacht.

tizitätsgrad ändert sich nicht wesentlich, da lediglich zwei von unendlich vielen regulären periodischen Bahnen extrahiert wurden. Der Einbruch ist jedoch nach der Extraktion nicht mehr zu sehen. Der Grund dafür hängt mit der Existenz der Schalenstruktur zusammen: Die Bahnen verursachen einen oszillierenden Beitrag zur Niveauanzahl $N(f)$ bzw. der Niveaudichte $\rho(f)$, deren Kehrwert gerade den lokalen mittleren Abstand der Niveaus darstellt. Besitzen die Oszillationen eine hinreichend große Amplitude, so wechseln sich hohe und niedrige Eigenwertdichten periodisch ab, und der mittlere Niveauabstand zeigt zwei Skalen. Der Einbruch bei $s = 0.7$ ist also auf die Existenz von Bereichen hoher und niedriger Eigenwertdichten zurückzuführen.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese Struktur in der NND im Gegensatz zu den Superschalen *nicht* die Existenz zweier periodischer Bahnen erfordert.

Es genügt bereits eine kurze, dominante und gut isolierte Bahn, um ausgeprägte Oszillationen in der Niveaudichte zu verursachen. Dieser Gedanke motivierte, aus den im Rahmen von [48] gemessenen Daten des Stadionbillards erneut eine NND mit geringer Binbreite zu berechnen. Diese ist in Abb. 4.13 gezeigt, und tatsächlich ist ein Einbruch bei $s = 0.9$ zu erkennen. Er ist zwar weniger deutlich ausgeprägt als beim Pilzbillard, jedoch ebenso in allen Frequenzbereichen zu finden.

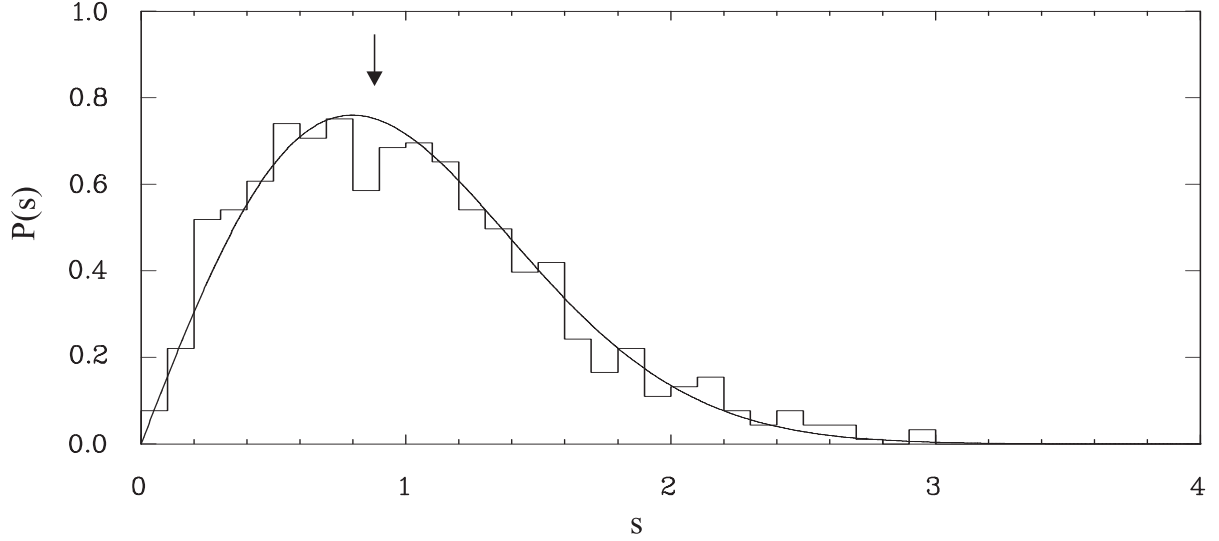


Abb. 4.13: Abstandsverteilung eines supraleitenden Stadionbillards aus [48]. Auch hier ist ein, wenn auch kleinerer, Einbruch bei etwa $s = 0.9$ zu finden.

In [86] wurde bereits gezeigt, dass periodische Bahnen einen Einfluss auf die NND haben können. Lange herrschte jedoch die Vorstellung vor, dass kurze periodische Bahnen vorwiegend Einfluss auf langreichweitige Korrelationen nehmen. Grund hierfür ist die Eigenschaft der Fouriertransformation, dass kurzen Frequenzdifferenzen große Längenskalen entsprechen und umgekehrt. Mit den hier präsentierten Ergebnissen wird deutlich, dass aber auch *kurze* Bahnen die *kurzreichweitigen* Korrelationen beeinflussen können, wenn sie isoliert stehen und hinreichend dominant sind.

4.5 Reguläre und chaotische Zustände

Aus den vorherigen Abschnitten wird deutlich, dass Regularität und Chaos in Quantenpilzbillard eine gewissen Wechselwirkung unterliegen. Gleichzeitig lassen sich aber reguläre Bahnen durch reguläre Zustände aus dem Kreisbillard beschreiben und erklären zudem die wesentlichen nichtgenerischen Eigenschaften der Billards. Obwohl also dynamisches Tunneln stattfindet, besteht das Spektrum aus einem regulären und einen chaotischen Teil. Bei typischen gemischten Systemen ist das nur im semiklassischen Limes bei hohen Quantenzahlen der Fall, bei Pilzbillard hingegen schon bei niedrigen, was eine Konsequenz des klar getrennten Phasenraumes ist.

In diesem Abschnitt wird dieses Bild untermauert, indem die Trennung des Spektrums in einen chaotischen und einen regulären Teil an Hand der gemessenen Daten durchgeführt wird. Durch Wellenfunktionsmessungen wird dies in Kap. 5 noch bestätigt werden. Die Ursache für die Restwechselwirkung zwischen den beiden Teilspektren ist dynamisches Tunneln. Als Abschluss der spektralen Untersuchungen wird aus der Kenntnis der exakten Position der Eigenwerte dieses Phänomen in Pilzbillard quantitativ untersucht. Alle im Folgenden vorgestellten Analysen beziehen sich auf das große Pilzbillard. Die Auswertungen am kleinen Billard erbrachten ähnliche Ergebnisse.

4.5.1 Separation regulärer und chaotischer Moden

Bereits in Abschnitt 4.3.1 floss die Annahme ein, dass es im Pilzbillard reguläre Zustände gibt, die denjenigen Eigenmoden des Viertelkreisbillards entsprechen, welche hinreichend nah an der Kreisperipherie lokalisiert sind. Für eine solche Mode bleibt der Stamm im Pilzbillard nahezu unsichtbar, und in Felddbild und Eigenfrequenz unterscheidet sie sich nur geringfügig von der entsprechenden Mode im Viertelkreisbillard. Gleichung (4.12) erlaubt es zwar, die Eigenfrequenzen von Zuständen aus dem Viertelkreisbillard zu berechnen, jedoch konnten an den entsprechenden Stellen im gemessenen Spektrum *keine* Zustände gefunden werden. Dies liegt einerseits an der Kontraktion des Billards bei Abkühlung auf 4.2 K. Andererseits gibt es mechanische Imperfektionen, die eine kleine Frequenzverschiebung gegenüber einem idealen Resonator bewirken, so dass eine direkte

Zuordnung von gerechneten mit gemessenen Eigenwerten im Bereich hoher Niveaudichten nicht mehr möglich ist.

Dennoch konnten die regulären Zustände auf experimenteller Grundlage identifiziert werden: Die Eigenwerte vom Kreisbillard sind durch die n -ten Nullstellen der Besselfunktionen m -ter Ordnung gegeben (vgl. Gl. (4.12)). Sie haben bei festem n für hinreichend hohe m einen gleichbleibenden Abstand. Tatsächlich wurden in den Spektren Sequenzen von äquidistanten Resonanzen gefunden. Mit abnehmender Frequenz brechen diese plötzlich ab, d. h. die Abstände wachsen an dieser Stelle schnell an. Dies entspricht nach Abschnitt 4.3.2 dem kleinsten erlaubten Zustand im Pilzbillard bei festem n . Für niedrigere Frequenzen können keine weiteren regulären Moden existieren, da die Wellenfunktion so weit im Inneren lokalisiert ist, dass der Stamm nicht mehr als eine kleine Störung betrachtet werden kann. Aus Gl. (4.14) können diese Frequenzen berechnet werden, was die Zuordnung der Quantenzahl n zu den gefundenen Eigenwertsequenzen erlaubt. Innerhalb einer Sequenz ist die Niveaudichte gering genug, um den einzelnen Zuständen im Vergleich mit Gl. (4.12) auch die Quantenzahl m zuordnen zu können. Somit wurden alle regulären Zustände im Experiment identifiziert und mit Quantenzahlen versehen. Benutzt wurde dazu lediglich die Annahme, dass die regulären Eigenfunktionen im Pilzbillard zu Eigenfunktionen des Viertelkreises korrespondieren, was durch das Ergebnis bestätigt wird.

4.5.2 Statistische Eigenschaften der Teilspektren

Von den 938 gefunden Zuständen konnten 154 als regulär identifiziert werden. Die restlichen 734 werden als chaotisch eingestuft. Der reguläre (chaotische) Teil des Spektrums kann semiklassisch nach Gl. (4.9) als eine Summe über reguläre (chaotische) Bahnen aufgefasst werden. Daher sollten die regulären (chaotischen) Wellenfunktionen in dem regulären (chaotischen) Teil des klassischen Phasenraums lokalisiert sein. Nach der Bohr-Sommerfeldschen Quantisierungsbedingung [9] ist die Anzahl der Zustände proportional zum eingenommenen Phasenraumvolumen. Das Verhältnis regulärer Zustände zur Gesamtzahl $734/938 \approx 0.783$ kommt dem Chaotizitätsgrad des großen Pilzbillards $q_c = 0.823$ ziemlich nahe.

Einen weiteren Konsistenztest liefern die spektralen Statistiken, die nun auf das reguläre sowie das chaotische Teilspektrum angewendet werden können. Abbil-

Tab. 4.3: Aus den experimentellen INND, Σ^2 und Δ_3 Statistiken mit dem BR-Modell erhaltene Chaotizitätsparameter q_c . Die Auswertungen wurden für das reguläre und chaotische Teilspektrum des großen Pilzbillards mit 734 bzw. 154 Eigenwerten durchgeführt.

Zustände	$q_c^{INN D}$	$q_c^{\Sigma^2}$	$q_c^{\Delta_3}$
chaotisch	0.98	0.99	0.99
regulär	0.19	0.50	0.00

dung 4.14 zeigt die NND des chaotischen und regulären Teilspektrums. Man findet eine gute Übereinstimmung mit GOE- bzw. Poisson-Statistik.

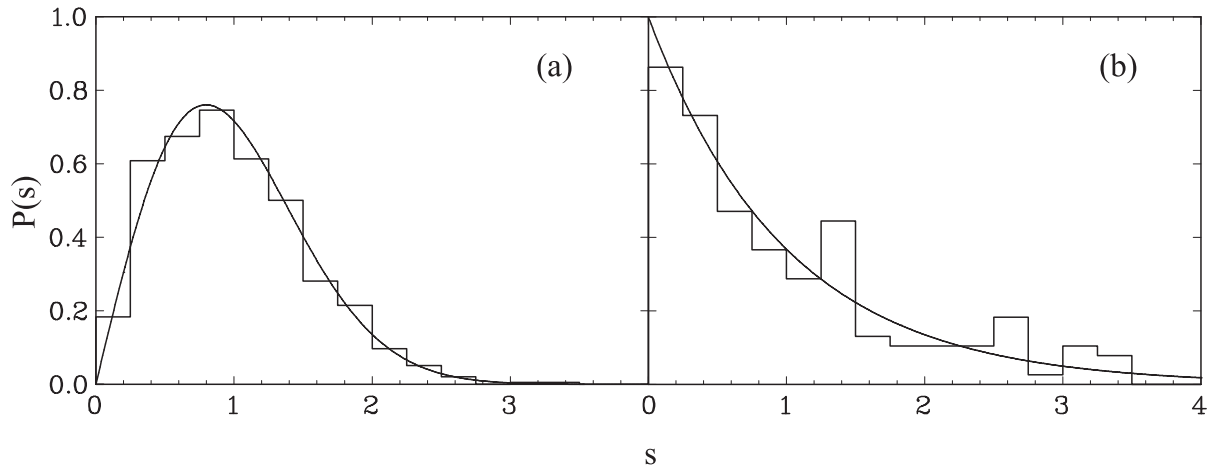


Abb. 4.14: Abstandsverteilungen des chaotischen (a) und regulären (b) Teils des Spektrums des großen Pilzbillards. Die Daten stimmen mit GOE- bzw. Poisson-Statistik überein.

Tabelle 4.3 enthält die aus einer Anpassung des BR-Modells erhaltenen Chaotizitätsparameter für die INND, Σ^2 und Δ_3 Statistiken. Das chaotische Teilspektrum folgt der Erwartung $q_c = 1$. Die Werte für das reguläre Teilspektrum schwanken stark, da die Anzahl der Eigenwerte gering ist. Trotzdem zeigt sich, dass q_c klein ist.

4.5.3 Dynamisches Tunneln

An bereits mehreren Stellen in dieser Arbeit ist der Begriff *dynamisches Tunneln* [42] gefallen. Bereits Doron und Frischat [87] konnten zeigen, dass sich dynamisches Tunneln in Quantenspektren als eine kleine Eigenwertverschiebung äußert. Beim *chaos-induzierten Tunneln* [88] spielt darüber hinaus das Chaos eine Botenrolle und verstärkt den Tunnelstrom. Im Falle eines Dubletts kann man Tunneln als Aufspaltung beobachten, was in einem Präzisionsexperiment [65] nachgewiesen wurde.

Bei Pilzbillards findet Tunneln von regulären Moden aus dem Hut in den Stamm statt, was sich in mehreren Situationen bestätigt:

- In der NND zeigt sich, dass das BR-Modell für kleine s die Daten überschätzt. Nah beieinander stehende Eigenwerte erfahren also eine zusätzliche Abstoßung, die auf Tunneln zurückzuführen ist.
- In Wellenfunktionen (vgl. Kap. 5) werden gemessene Intensitätsverteilungen gezeigt, die im Hut nahe an der kleinstmöglichen Kaustik lokalisiert sind. Bei manchen kann man tatsächlich beobachten, wie einige Knotengebiete in den erweiterten Stamm hinein ragen. Die Wellenfunktionen des Kreisbillards erscheinen also auf Grund des Tunnelns im Pilz leicht verzerrt, und auch die Eigenfrequenz ist ein wenig verschieden.
- In dem Längenspektrum der chaotischen Moden sind vor allem Maxima zu finden, die zu chaotischen periodischen Bahnen gehören. Außerdem findet man auch kleine Maxima bei den Längen regulärer Orbits. Umgekehrt findet man im Längenspektrum regulärer Eigenwerte auch chaotische Bahnen. Folglich tragen die chaotischen Eigenwerte auch Informationen über die reguläre Dynamik im Pilzbillard und umgekehrt. Die Teilspektren stehen also über Tunneln in Wechselwirkung.
- Die Sequenzen von äquidistanten regulären Eigenwerten mit gleichem n besitzen ein minimal mögliches m . Abbildung 4.15 zeigt den Frequenzabstand der gemessenen regulären Eigenmoden zu den entsprechenden Eigenmoden im Kreisbillard, aufgetragen über der Frequenz. Deutlich sind die Sequenzen

für festes n zu erkennen. Für hohe Frequenzen stimmen die Eigenfrequenzen von Kreis und Pilz überein⁹. In der Nähe der Frequenz, bei der die Sequenz abbricht werden die Abstände schnell groß – das Tunneln bewirkt eine Frequenzverschiebung. Sie scheint in eine Richtung zu gehen und von gleicher Größenordnung zu sein.

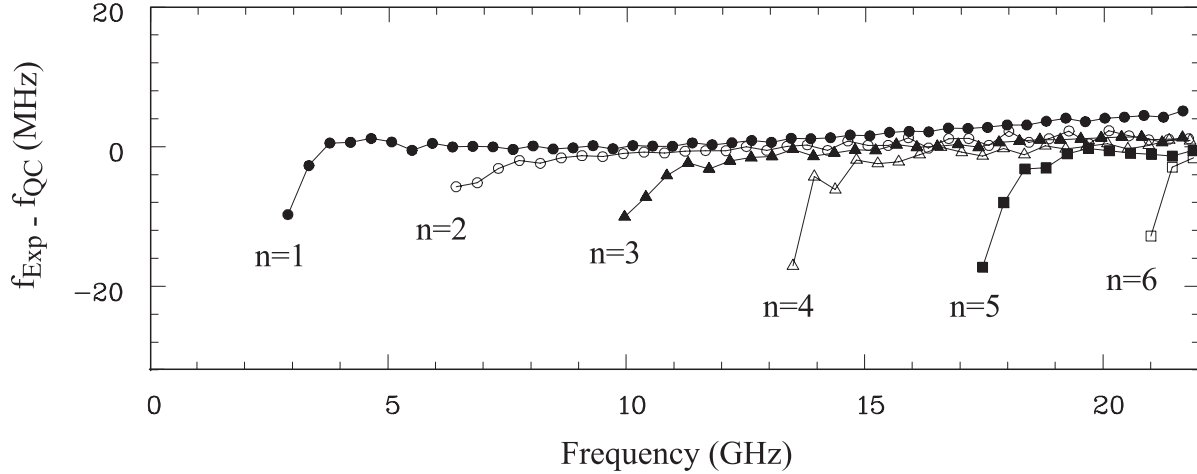


Abb. 4.15: Differenz der im großen Pilzbillard gemessenen Resonanzfrequenzen regulärer Eigenmoden zu den entsprechenden Moden des Kreisbillards, aufgetragen über der Frequenz. Die Sequenzen von Eigenwerten gehören zu gleicher radialer Quantenzahl n . Am niederfrequenten Ende jeder Sequenz verschwindet die Korrespondenz zwischen Moden des Pilz- und des Kreisbillards.

Gegenwärtig wird von mehreren Gruppen versucht, Tunnelraten aus RMT-Modellen abzuleiten [89,90] – bisher gibt es dafür kein quantitatives Modell. Es ist noch immer ungeklärt, ob der Tunnelprozess generische Eigenschaften besitzt. Es zeichnet sich jedoch ab, dass er stark von der Struktur des Phasenraums abhängt. Die Einflüsse dynamischen Tunnelns auf die Eigenwerte können in Pilzbillards direkt experimentell bestimmt werden. Diese Informationen sind nötig, um theoretische Modelle zur Beschreibung von Tunnelraten zu entwickeln und zu testen. Zudem erscheinen Pilzbillards als ideale Kandidaten für weitere Untersuchungen des Tunnelprozesses, denn durch den exakt getrennten Phasenraum gibt es einerseits

⁹Eine Ausnahme davon bildet die Sequenz für $n = 1$. Bei hohen Frequenzen ist die azimuthale Komponente des Wellenvektors bereits so groß, dass der konstruktionsbedingte Krümmungsradius der Ecken von 2 mm aufgelöst werden kann.

nur eine Grenzfläche, die beim Tunneln durchdrungen werden muss. Andererseits stellt die Möglichkeit, schon bei kleinen Eigenwerten die regulären Zustände als solche identifizieren zu können, die Manifestation des getrennten Phasenraumes in der Quantenmechanik dar: Es gibt keine Zustände, die zu KAM Inseln korrespondieren und den Übergangsbereich zwischen Regularität und Chaos besiedeln. Auch dieses spricht für eine geringere Komplexität des Tunnelprozesses im Vergleich zu anderen Systemen mit gemischter Dynamik.

5 Wellenfunktionen von Quantenpilzbillards

In diesem Kapitel sollen durch Messungen der Intensitätsverteilungen des elektrischen Feldes in einem pilzförmigen Mikrowellenbillard die im letzten Kapitel gezogenen Schlussfolgerungen bestätigt werden. Zunächst wird kurz auf das Messverfahren und die gemessenen Intensitätsverteilungen eingegangen. Anschließend werden die ermittelten Verteilungen gemäß ihrer Dynamik klassifiziert und ihre Eigenschaften diskutiert. Als Anwendung wird letztlich die gemittelte Intensitätsverteilung der gemessenen chaotischen Moden mit den Erwartungen der klassischen Mechanik verglichen.

5.1 Experimentelle Bestimmung von Intensitätsverteilungen

Zur Messung der Intensitätsverteilungen wurde der Messaufbau verwendet, der im Rahmen von [91] entwickelt wurde und dort detailliert beschrieben ist. Dabei wird in einem flachen Mikrowellenresonator ein kleiner, zylinderförmiger Störkörper durch das Innere des Resonators bewegt. Er besteht aus einem Kunststoff, in dem ferromagnetische Partikel eingelassen sind. Während er für das elektrische Feld im Resonator eine Störung der Randbedingungen darstellt, bleibt das magnetische Hochfrequenzfeld von ihm unbeeinflusst¹⁰. Dennoch reagiert er auf ein konstantes Magnetfeld, was eine magnetische Kopplung ermöglicht. Die Bewegung des Störkörpers im Inneren des Resonators wird von einem auf der Unterseite des Billards befindlichen Magneten bewirkt, der seinerseits durch einen Schrittmotor systematisch über die gesamte Billardoberfläche gesteuert wird.

Die Störung der Randbedingung verursacht eine Störung der elektrischen Feldverteilung im Inneren des Resonators, was wiederum eine Verschiebung der Resonanzfrequenz der zu vermessenden Feldmode bedeutet. Da der Störkörper mit einem Durchmesser von 2 mm sehr klein ist, kann das elektrische Feld in der

¹⁰Das magnetische Feld ändert sich trotzdem, da es mit dem elektrischen Feld gekoppelt ist.

ungestörten Kavität über seiner Grundfläche als konstant angenommen werden. Nach einem Theorem von Maier und Slater [92] gilt für einen hinreichend kleinen Störkörper

$$\Delta f(x, y) \propto E(x, y)^2 = I(x, y) , \quad (5.1)$$

wobei $E(x, y)$ das elektrische Feld und $I(x, y)$ die Intensität an der Stelle (x, y) bezeichnen. Zur Messung von Intensitätsverteilungen wurde das Maier Slater Theorem in der Beschleunigerphysik [93] sowie auch an Mikrowellenbillards [94] schon oft erfolgreich angewendet.

Die Messungen der Resonanzverschiebungen wären sehr zeitaufwendig, wenn in jedem Punkt im Billard ein kleiner Teil des Spektrums um die Resonanzfrequenz aufgenommen werden müsste. Es genügt aber, Phasenmessungen bei Leistungstransmission zwischen zwei Antennen durchzuführen. Dabei gilt

$$\Delta f \propto \arctan(\Delta\varphi) \approx \Delta\varphi . \quad (5.2)$$

Die letzte Näherung ist erfüllt, wenn der Störkörper hinreichend klein ist, so dass die Frequenz- und damit auch die Phasenverschiebung klein bleiben. Phasenmessungen sind andererseits störanfälliger als Frequenzmessungen. Daher mussten die Messungen in einer temperaturstabilisierten Atmosphäre bei $T = 30 \pm 0.5^\circ\text{C}$ durchgeführt werden.

Um bei Raumtemperaturen hohe Güten zur Messung möglichst vieler Feldbilder zu erreichen, wurde eine skalierte Kopie des großen Pilzbillards mit Radius 580 mm angefertigt. Mit einer Kavitätshöhe von 20 mm wurde ein Volumenzuwachs um etwa den Faktor 23 erreicht, der direkt in die Güte des Resonators einfließt. Dadurch konnten im Bereich von 2 – 6 GHz, wie von der Weyl-Formel Gl. (4.1) vorhergesagt, 360 Resonanzen detektiert werden. Die Intensitätsmessungen wurden im Bereich von 2 – 3.55 GHz mit einem Ortsraster von 10×10 mm, im Bereich von 3.55 – 6 GHz mit einem Ortsraster von 5×5 mm durchgeführt. Dabei wurden insgesamt 304 Moden erfolgreich vermessen. Die fehlenden Verteilungen konnten trotz mehrerer möglicher Antennenkombinationen nicht bestimmt werden. Ein Grund hierfür ist z. B., dass die zu messende Mode zu nahe an der Kreisperipherie lokalisiert ist.

5.2 Eigenzustände des Pilzbillards

Die Abbildungen 5.1, 5.2 und 5.3 zeigen einige Beispiele der gemessenen Intensitätsverteilungen. Sie entsprechen der quantenmechanischen Aufenthaltswahrscheinlichkeit für ein Teilchen im Billard. Die Aussagen aus Kap. 4 werden bestätigt: Es gibt chaotische Moden (vgl. Abb. 5.1), die über die ganze Billardebene verteilt sind. Reguläre Moden (vgl. Abb. 5.2) hingegen zeichnen sich durch eine Lokalisierung im Hut außerhalb der kleinstmöglichen Kaustik aus und entsprechen Eigenmoden des Kreisbillards, d. h. sie können durch eine radiale und eine azimuthale Quantenzahl n und m charakterisiert werden.

Zur Klassifizierung der Zustände wurde das Kriterium benutzt, dass reguläre Moden oberhalb der kleinstmöglichen Kaustik, chaotische hingegen vorwiegend im erweiterten Stamm lokalisiert sind. Außerdem wurde für reguläre Moden gefordert, dass die Quantisierung im äußeren Kreisring hinreichend gut ausgebildet ist, so dass man durch abzählen der Knotengebiete in radialer und azimuthaler Richtung die Quantenzahlen n und m bestimmen kann. Andere mögliche Methoden zur Klassifizierung sind durchaus denkbar: Wären nicht nur die Intensitäten, sondern auch die Feldverteilungen bekannt¹¹, so könnte man mit Husimi- oder Wigner-Verteilungen die Lokalisierung der Wellenfunktion auf dem klassischen Phasenraum visualisieren [60]. Reguläre Zustände befinden sich in den regulären Gebieten, chaotische im chaotischen Meer. Alternativ kann man auch experimentell bestimmte Wellenfunktionen nach den Eigenfunktionen des Kreisbillards entwickeln. Ein scharfes Maximum in der Verteilung der Entwicklungskoeffizienten deutet auf eine reguläre Mode des Pilzbillards, entsprechend der Mode im Kreisbillard, hin. Da jedoch die Klassifizierung durch bloßes Hinsehen für fast alle gemessenen Intensitätsverteilungen eindeutig war, wurde im Rahmen dieser Arbeit auf versiertere Methoden verzichtet.

Einige Beispiele von Moden, für die eine verlässliche Zuordnung nicht möglich war, sind in Abb. 5.3 gezeigt. Sie zeichnen sich durch eine bevorzugte Lokalisierung entlang der kleinstmöglichen Kaustik aus. Während das Feldbild im äußeren Kreisring noch sehr regulär aussieht, zeigen sich im erweiterten Stamm Chaos und

¹¹Durch die in [91] beschriebene Rekonstruktionsprozedur ist die Bestimmung der Felder aus den Intensitätsverteilungen möglich.

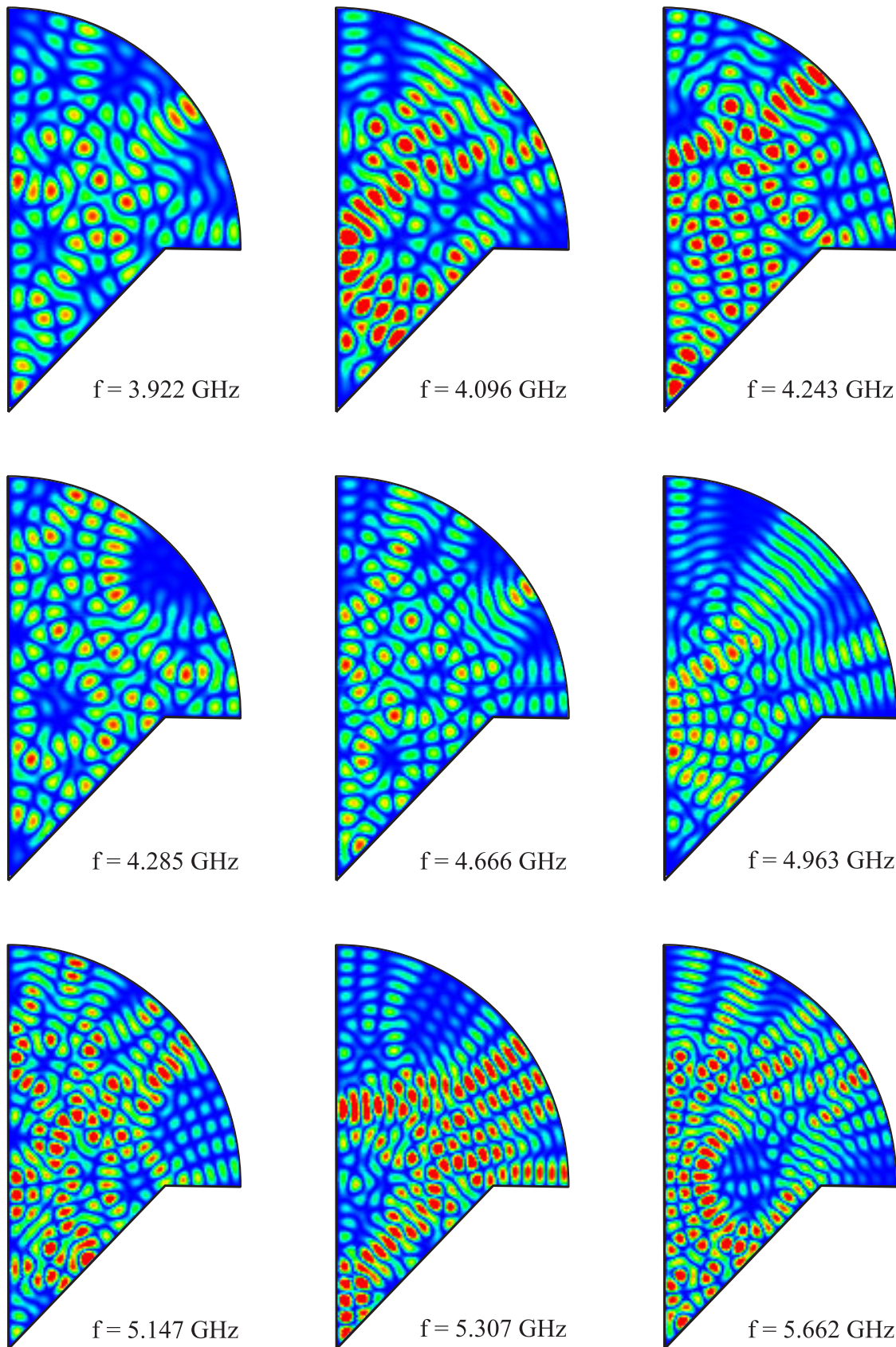


Abb. 5.1: Beispiele für chaotische Wellenfunktionen im Pilzbillard. Blaue Farbe entspricht minimaler, rote maximaler Intensität.

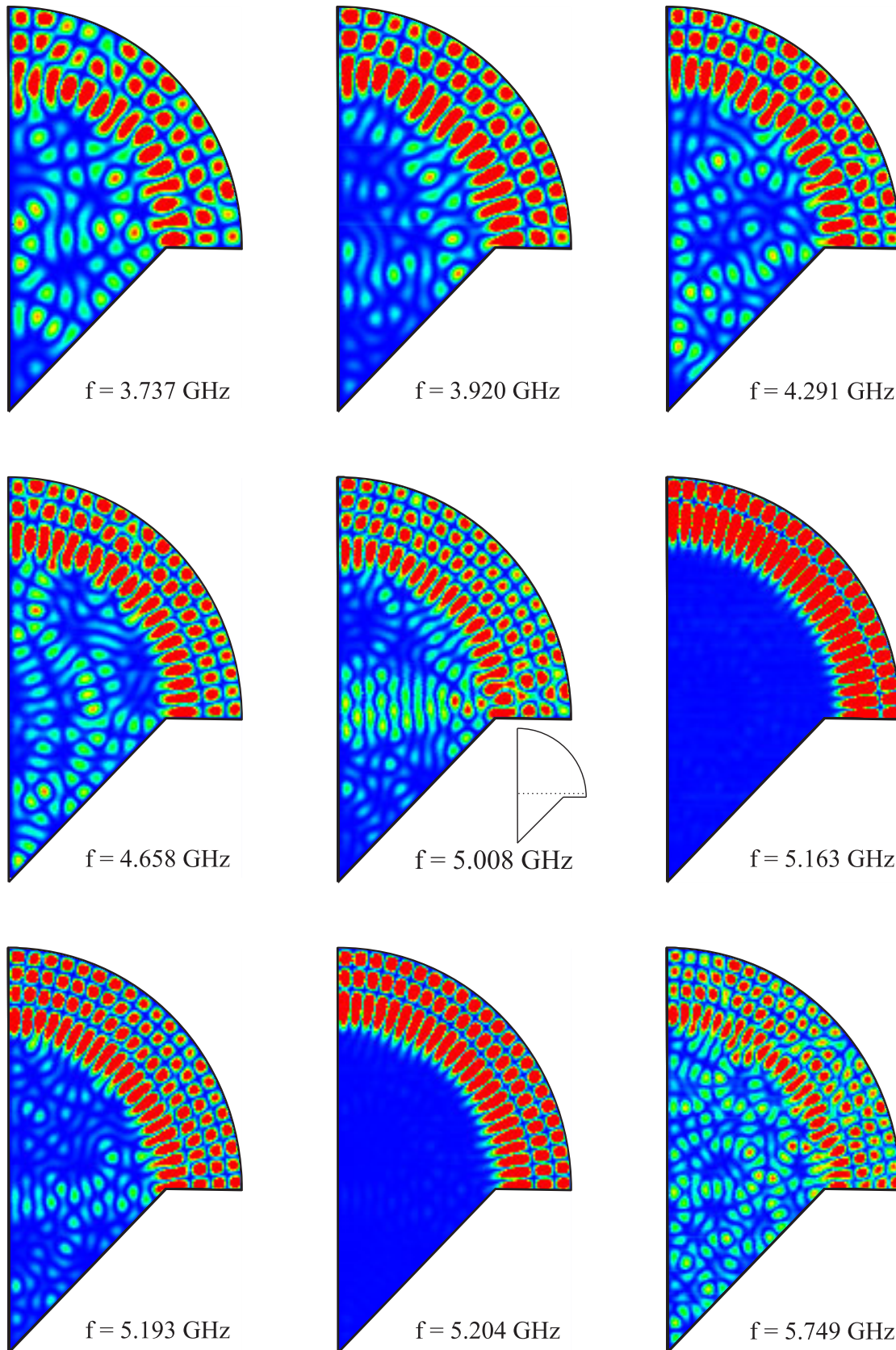


Abb. 5.2: Beispiele für reguläre Wellenfunktionen im Pilzbillard. Blaue Farbe entspricht minimaler, rote maximaler Intensität. Die kleine Skizze zeigt eine instabile Bahn, entlang der sich in der zugehörigen Wellenfunktion ein Scar ausgebildet hat.

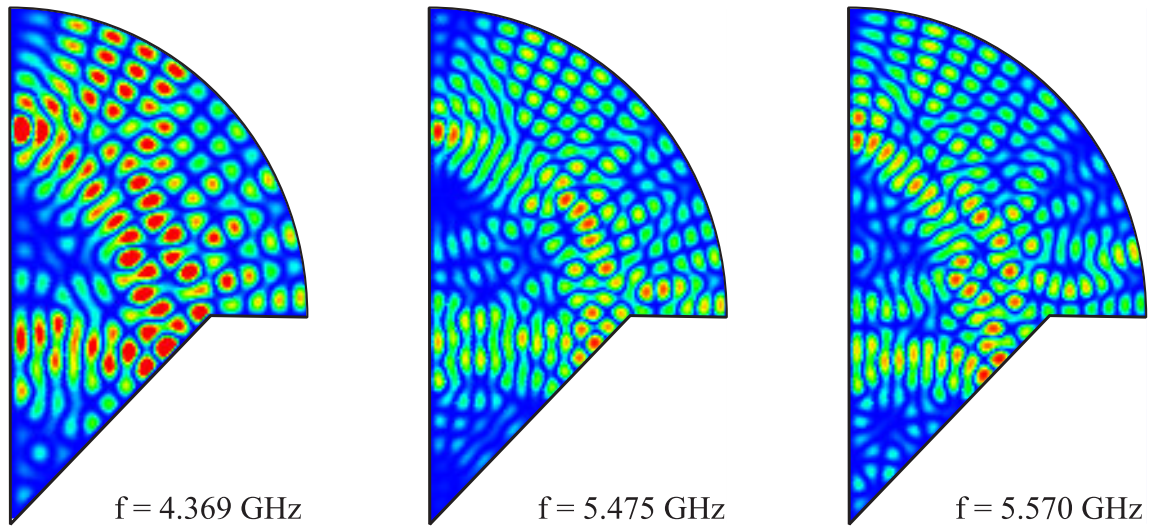


Abb. 5.3: Beispiele für gemischte Wellenfunktionen im Pilzbillard. Ihre Klassifikation ist nicht eindeutig. Blaue Farbe entspricht minimaler, rote maximaler Intensität.

ähnlich hohe Intensitätsamplituden wie im Hut. Die Anzahl der gemessenen gemischten Moden ist gering, was die Vorstellung aus Kap. 4 bekräftigt: Moden sind in der Regel entweder regulär oder chaotisch. Da bei Pilzbillards der Phasenraum klar getrennt und um den regulären Bereich keine „Hülle“ mit einer fraktalen Struktur von KAM Inseln mit endlicher Breite zu finden ist, gehören die Moden entweder zum chaotischen oder zum regulären Bereich des Phasenraums. Eine Lokalisierung auf der Trennlinie zwischen beiden ist unwahrscheinlich, die meisten Wellenfunktionen werden von ihr kaum beeinflusst. Dies ist eine Manifestation des klar getrennten Phasenraums in der Quantenmechanik.

In den Intensitätsverteilungen fallen noch zwei Besonderheiten auf:

- Scars: Die reguläre Intensitätsverteilung bei $f = 5.008$ GHz zeigt einen Scar, d. h. eine Lokalisierung entlang einer instabilen Bahn [95]. Ein entsprechendes Maximum ist im Längenspektrum des großen Pilzbillards in Abb. 4.7 bei $x \approx 0.5$ m zu erkennen. Auch bei den gemischten Moden sind starke Lokalisierungen zu erkennen, die allerdings zu keiner instabilen Bahn gehören.
- Dynamisches Tunneln: Bereits in Kap. 4 konnte dynamisches Tunneln in der NND, den Längenspektren und in der Verschiebung der regulären Eigenwerte gegenüber den entsprechenden des Kreisbillards beobachtet werden. Hier

ist zu erkennen, wie sich Tunneln in den Intensitätsverteilungen äußert: Die meisten chaotischen Intensitätsverteilungen zeigen im Hut Anzeichen einer Restquantisierung. Das für reguläre Systeme typische „Schachbrettmuster“ mit Kreuzungen der Knotenlinien ist, wenn auch stark verzerrt, beobachtbar. Einige Knotengebiete der regulären Eigenmoden zeigen hingegen, wenn sie nahe der kleinstmöglichen Kaustik lokalisiert sind, Ausläufer, die in den Stamm hineinragen. Dadurch wird das Feld verzerrt, wobei die Feldgradienten niedriger werden. Daher sind die zugehörigen Resonanzfrequenzen etwas kleiner als die der entsprechenden Moden des Kreisbillards. Die gemischten Moden zeigen eine Lokalisierung auf der kleinstmöglichen Kaustik und stellen damit die Grenze zwischen Regularität und Chaos dar. Sie entsprechen den *beach modes* im Ringbillard [65] und vermitteln das Tunneln. In Abb. 4.15 liegen ihre Eigenwerte am niederfrequenten Ende der Sequenzen von Eigenwerten mit gleicher radialen Quantenzahl n . Man kann sie als reguläre Moden identifizieren, die durch dynamisches Tunneln eine große Feldverzerrung und Frequenzverschiebung erleiden.

5.3 Mittlere Intensitätsverteilung chaotischer Moden

Im Frequenzbereich von 2 – 6 GHz wurden 239 chaotische Moden im Experiment vermessen. Es wurde mit diesem Datenmaterial untersucht, wie sich die Eigenschaften der chaotischen Komponente des klassischen Phasenraumes auf die Quantenmechanik übertragen. Die klassische Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zu finden, welches sich auf einer beliebigen chaotischen Bahn bewegt, beträgt 1 im erweiterten Stamm und fällt nach Gl. (3.2) zur Kreisperipherie hin ab. Um das wellenmechanische Analogon zu erhalten, wurden zunächst alle $n_{\max} = 239$ Intensitätsverteilungen gemäß

$$\tilde{I}(\vec{r}) = \frac{q_c}{N} I(\vec{r}) \quad (5.3)$$

mit

$$N = \int_{\Omega} I(\vec{r}) d\vec{r} \quad (5.4)$$

normiert, wobei Ω die Billardfläche und $\vec{r} = (x, y)$ einen Punkt darin bezeichnet, und anschließend die mittlere Aufenthaltswahrscheinlichkeit

$$p_c(\vec{r}) = \frac{1}{n_{\max}} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \tilde{I}(\vec{r}) \quad (5.5)$$

berechnet.

Abbildung 5.4(a) zeigt diese Größe. Es ist zu erkennen, dass die Wahrschein-

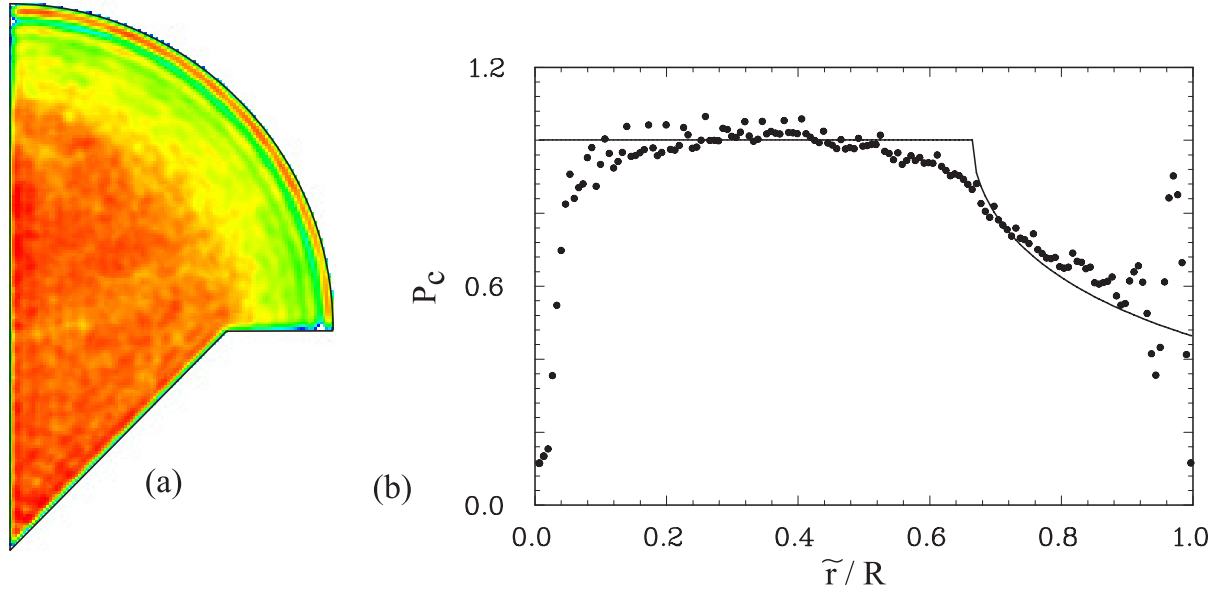


Abb. 5.4: Gemittelte Aufenthaltswahrscheinlichkeit chaotischer Intensitätsverteilungen im Billard ((a), Farbskala wie in den vorherigen Bildern) und Profilvergleich (b) der Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Hut (Datenpunkte) mit der klassischen Wahrscheinlichkeit (durchgezogene Kurve), dort ein Teilchen auf einer chaotischen Bahn zu finden. Bis auf Quanteneffekte nahe der Berandung und beim Knick bei $\tilde{r}/R = 2/3$ reproduziert das Wellenexperiment die Aussagen der klassischen Mechanik.

lichkeit im erweiterten Stamm, wie in der klassischen Mechanik erwartet, konstant ist und im äußeren Kreisring abfällt. An den Berandungen, besonders an der Kreisperipherie, erkennt man Oszillationen. Am Rand wird das Feld wegen der Dirichletschen Randbedingungen auf 0 gezwungen. Da das Feld einer Ortskorrelationsfunktion folgt, muss in einem charakteristischen Abstand von einer Knotenlinie eine weitere Knotenlinie gefunden werden. Daher beobachtet man

Oszillationen in der Nähe des Randes, denn der Rand stellt für alle Wellenfunktionen eine Knotenlinie dar. Die Oszillationen können durch eine Besselfunktion beschrieben werden [96].

Um den Abfall der Intensität im Hut genauer mit Gl. (3.2) vergleichen zu können, wurde das abfallende Feldprofil im gesamten Hut in Polarkoordinaten auf einen Radiusvektor projiziert. In Abb. 5.4(b) wird die so erhaltene Intensitätsverteilung über dem Abstand \tilde{r} vom Kreismittelpunkt mit der Vorhersage der klassischen Mechanik verglichen. Es ist prinzipiell eine erstaunlich gute Übereinstimmung zu erkennen. Die Abweichungen sind quantenmechanischer Natur: An den Rändern bei $\tilde{r}/R = 0$ und $\tilde{r}/R = 1$ wird – im Gegensatz zur klassischen Mechanik – das Feld auf 0 gezwungen. Der „Knick“ am Ort der kleinstmöglichen Kaustik erscheint in der Quantenmechanik auf Grund der Unschärferelation über die Größenordnung einer Wellenlänge verschmiert. Auch hierin zeigt sich, dass die Trennung des Spektrums in einen regulären und einen chaotischen Teil bereits bei niedriger Eigenwertzahl hinreichend gut funktioniert, dass damit die Eigenschaften des klassischen Phasenraumes durch die quantenmechanischen Eigenfunktionen reproduziert werden. Dies ist nur möglich, weil der Phasenraum der Pilzbillards klar getrennt ist.

6 Zerfallsverhalten von offenen Pilzbillardards

Während quantenmechanische Systeme durch einen Messprozess auf ganz natürliche Art und Weise an die Außenwelt koppeln und damit offene Systeme darstellen (vgl. Kap. 7), sind auch Billards mit physikalischen Öffnungen unter verschiedenen Aspekten von Interesse [29, 97–103]. In diesem Kapitel werden die klassischen Eigenschaften offener Pilzbillardards untersucht. Zunächst wird das offene Pilzbillard mit einem Loch definiert und auf ein noch einfacheres System, das sog. Θ -Billard (sprich: *Theta-Billard*) abgebildet. Dann werden die Verteilungen der Verweildauern im Billard für ein Teilchen, das von außen in das Billard eingebracht wurde, für einen festen Drehimpuls und anschließend für beliebige Drehimpulse untersucht. Letztlich werden die Ergebnisse kurz hinsichtlich ihrer Relevanz für Quantensysteme diskutiert.

6.1 Offenes Pilzbillard und Theta-Billard

Ein offenes Pilzbillard entsteht, indem man von einem Pilzbillard den Stamm entfernt. Es entsteht ein Halbkreis mit einem Loch auf der Durchmesserlinie wie in Abb. 6.1(a) abgebildet. Dieses Objekt wird in diesem Kapitel als Streusystem aufgefasst, d. h. es wird die Frage gestellt, wie lange ein Teilchen im Inneren des Halbkreises verweilt, bevor es wieder aus der Öffnung nach außen tritt. Im Gegensatz zu anderen Streusystemen, deren Streuzentrum eine reguläre Dynamik besitzt, zeigen offene Pilzbillardards *keine* Smale-Hufeisenkonstruktion [104] im klassischen Phasenraum, aus deren Merkmalen normalerweise Aussagen über die Verweildauern im Streuzentrum abgeleitet werden können [101, 105]. Ist die Öffnung, die der Stammbreite $2r$ im vollen Pilzbillard entspricht, hinreichend klein, so besitzen alle Teilchen nach Gl. (3.1) einen kleinen Drehimpuls bezüglich des Kreiscentrums, und die durchschrittene Bahnlänge zwischen zwei Reflexionen an der Kreisperipherie entspricht etwa dem Durchmesser $2R$ des Halbkreises. Dann ist die Verweildauer im Inneren des Billards in guter Näherung proportional zur Anzahl der Reflexionen an der Kreislinie – Reflexionen mit der geraden Unterseite

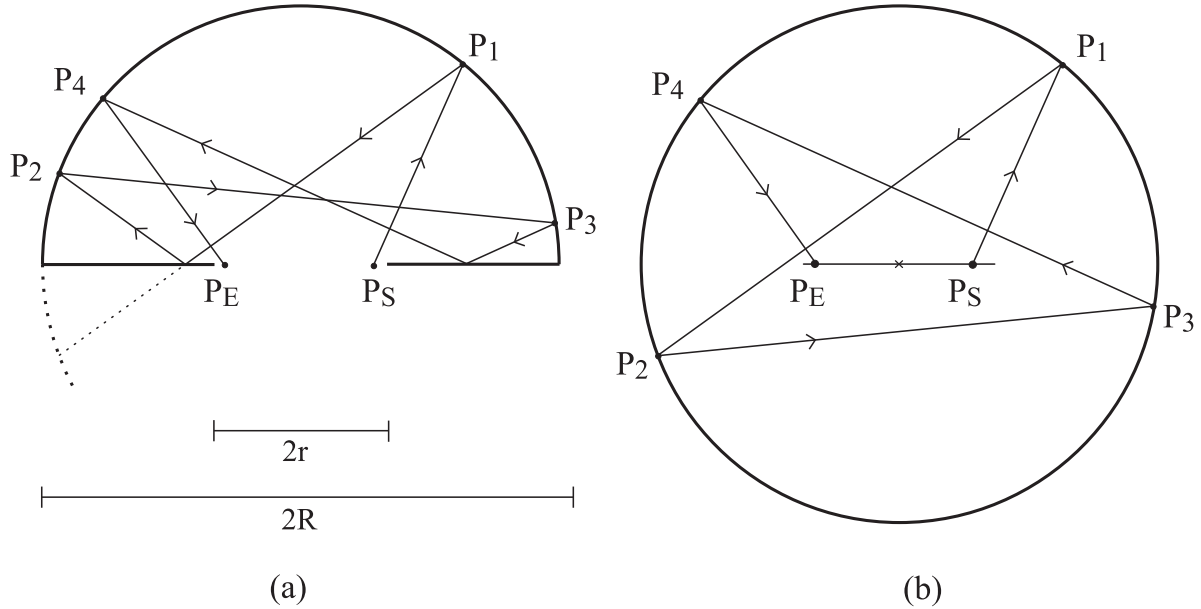


Abb. 6.1: Das offene Pilzbillard (a) ist ein Pilzbillard ohne Stamm, d. h. ein Halbkreis mit einer Öffnung an der Unterseite. Die Konstruktion der entsprechenden Bahnen im Vollkreis ist gestrichelt angedeutet. Die Dynamik kann auf die des Θ -Billards (b) durch Spiegelungen der Bahn, wie in (a) angedeutet, abgebildet werden. Die Öffnung Loch wird dabei zu einer Linie durch den Durchmesser, die Anfangs- und Endpunkte für alle Teilchenbahnen definiert. Eine Bahn ist als Beispiel in beiden Systemen eingezeichnet.

des Hutes werden nicht gezählt. Trifft ein Teilchen auf dieses Geradensegment, kann man sich die reflektierte Bahn daran gespiegelt vorstellen [80], wodurch die einfallende Bahn über die Billardberandung hinaus fortgesetzt wird. Die nächste Reflexion mit dem Kreisrand findet im Spiegelbild unterhalb des Geradensegmentes statt, wie in Abb. 6.1(a) angedeutet. Alle Bahnen im offenen Pilzbillard entsprechen also Bahnen im Kreisbillard. Als ein zum offenen Pilzbillard äquivalentes System erhält man so das sog. Θ -Billard wie in Abb. 6.1(b) dargestellt: Es besteht aus einem Kreis mit Radius R , durch dessen Mittelpunkt eine Linie der Länge $2r$ geht, die alle möglichen Anfangs- und Endpunkte für Teilchenbahnen definiert – sie wird im Folgenden als *zentrale Linie* bezeichnet. Aus dieser Linie können Teilchen austreten und sich in der Billardfläche bewegen. Nach einer oder mehreren Reflexionen mit der Kreisperipherie kann es passieren, dass ein Bahnsegment die zentrale Linie wieder schneidet. Das entspricht dem Verlassen des Teilchens aus dem offenen Pilzbillard. Die Anzahl der Reflexionen mit der

Kreisperipherie ist die selbe wie im offenen Pilzbillard¹².

Wie bereits in Kap. 3 gezeigt, formen die Bahnen im Kreis- bzw. Pilzbillard Kautiken, deren Radius der minimale Abstand jedes Bahnsegments zum Mittelpunkt des Kreises ist und bis auf einen konstanten Faktor gerade dem Drehimpuls entspricht. Im Folgenden wird daher der Drehimpuls in Längeneinheiten verwendet (vgl. Gl. (3.1)). Teilchenbahnen mit hinreichend großem Drehimpuls formen Kautiken, die außerhalb der zentralen Linie im Θ -Billard liegen. Teilchen auf diesen Bahnen bleiben für alle Zeiten im Billard. Sind die Bahnen periodisch, formen sie entweder Polygone oder Sternbahnen. Sind sie nichtperiodisch, können sie mit langsam rotierenden periodischen Bahnen assoziiert werden, d. h. sie sind periodisch in einem rotierenden Bezugssystem. Der größtmögliche Drehimpuls von Teilchen, für die die zentrale Linie eine Rolle spielt, ist durch den Radius der kleinstmöglichen Kaustik und damit durch die halbe Länge der zentralen Linie gegeben. Jede aperiodische Bahn mit kleinerem Drehimpuls wird irgendwann die zentrale Linie schneiden. Periodische Bahnen zeigen in der Regel das selbe Verhalten. Eine Ausnahme hiervon bilden Bahnen, die in manchen Orientierungen von der zentralen Linie unbeeinflusst bleiben, sie in anderen jedoch schneiden. Diese Bahnen bilden eine parabolische Mannigfaltigkeit im chaotischen Teil des Phasenraums und wurden detailliert in [55] untersucht.

Um die Aufenthaltsdauern im Θ -Billard von aus der zentralen Linie austretenden Teilchen zu berechnen, wurde ein Strahlverfolgungsprogramm geschrieben, welches die Anzahl der Reflexionen mit der Kreislinie zwischen Ein- und Austritt der Teilchen zählt. Die Teilchen wurden dabei mit verschiedenen Anfangsbedingungen, d. h. Orten und Impulsen aus der zentralen Linie entsendet. Interessanterweise, und das ist das vorrangige Ergebnis in diesem Kapitel, sind nicht alle natürlichen Zahlen als Reflexionszahlen erlaubt. Für ein Θ -Billard mit $r/R = 1/3$ wurde die Sequenz 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37 als das Spektrum der erlaubten Zahlen gefunden, was sehr an die generalisierte Fibonacci-Folge mit Startwerten 1 und 4 erinnert. Die nächste Zahl in der Folge ist jedoch 51, sie bricht die Gesetzmäßigkeit. Dennoch ist 51 die Summe aus den schon vorher vorkommenden Folgengliedern 14 und 37, was eine zu Grunde liegende Regelmäßigkeit erahnen lässt.

Im Folgenden soll der Mechanismus erklärt werden, der zu dieser Beobachtung

¹²Es sei hier angemerkt, dass das Θ -Billard ein theoretisches Konstrukt ist, während das offene Pilzbillard physikalisch realisiert werden kann.

führt. Hierzu wird zunächst untersucht, welche Reflexionszahlen für Bahnen mit einem festen Drehimpuls möglich sind. Die Zeitentwicklung der Teilchen wird in einer Poincaré-Abbildung formuliert, auf deren Grundlage sich ein sehr effizienter Algorithmus zur schnellen Berechnung der Reflexionszahlen aufbauen lässt. Überraschenderweise findet man, dass in der Regel nur drei Zahlen erlaubt sind. Sie werden im Folgenden *magisches Tripel*, die einzelnen Zahlen *magische Zahlen*¹³ genannt. Um die gesamte Struktur der Verweildauern bzw. das Spektrum der magischen Zahlen zu verstehen, werden die Argumente auf beliebige Drehimpulse verallgemeinert.

6.2 Verweildauern bei festem Drehimpuls

Wie bereits erwähnt schneiden Bahnen mit Drehimpuls $L < r$ in der Regel irgendwann die zentrale Linie. Aus Abb. 6.2 geht hervor, dass der Drehimpuls durch den in einem Reflexionspunkt gegen die Tangente gemessenen Ein- bzw. Ausfallswinkel ψ als

$$L = R \cos(\psi) ; 0 \leq \psi \leq \pi/2 \quad (6.1)$$

geschrieben werden kann.

Aus Symmetriegründen ist es hinreichend nur Teilchen zu betrachten, die aus der rechten Hälfte der zentralen Linie mit positiver vertikaler Impulskomponente austreten, d. h. die Teilchen treten aus der Linie nach oben aus. Für eine gegebene anfängliche Orientierung θ_0 befindet sich der Austrittspunkt auf der zentralen Linie im Abstand $d = M / \cos(\theta_0)$ vom Kreismittelpunkt (vgl. Abb. 6.2). Da nur Teilchen betrachtet werden, die zunächst aus der Linie austreten, muss $d < r$ erfüllt sein, und es ergibt sich

$$-\chi \leq \theta_0 \leq \chi \quad (6.3)$$

mit

$$\chi = \arccos(M/r) . \quad (6.4)$$

¹³Sie sind nicht zu verwechseln mit den magischen Zahlen der Kernphysik, die die charakteristischen Nukleonenzahlen in Kernen mit abgeschlossenen Schalen bezeichnen.

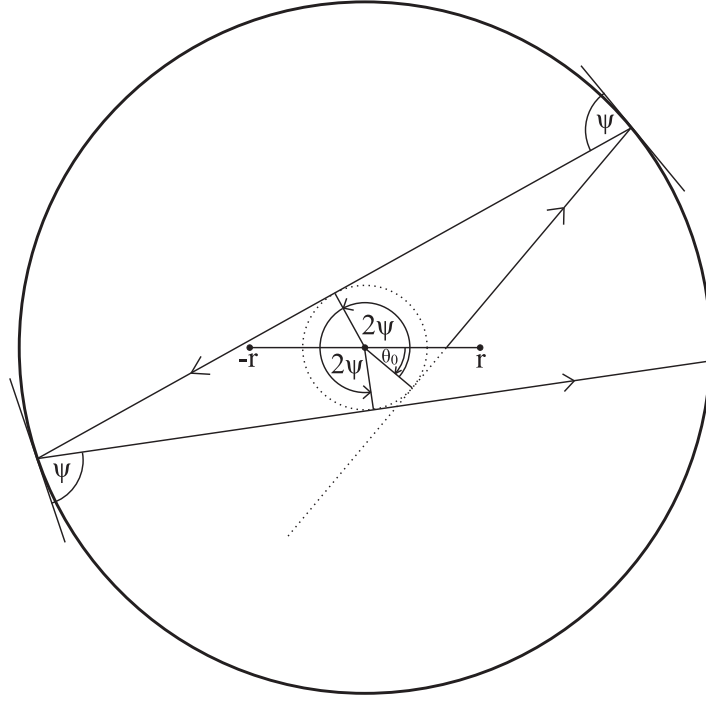


Abb. 6.2: Bahnen im Θ -Billard sind durch Angabe der Orientierung des ersten Bahnsegmentes Θ_0 sowie des halben Drehwinkels der Bahnsegmente bei einer Reflexion mit dem Rand ψ eindeutig charakterisiert. Für einen festen Drehimpuls ist ψ konstant.

Eine Teilchenbahn ist für festen Drehimpuls daher allein durch ihre Orientierung bei der Entsendung des Teilchens aus der zentralen Linie gekennzeichnet. Ebenso kann man die Orientierung des Bahnsegmentes nach n Reflexionen durch den mit der Horizontalen eingeschlossenen Winkel des Segmentes ausdrücken. Eine andere Wahl stellt sich als geeigneter heraus: Der Kreismittelpunkt und der Berührungspunkt des Bahnsegmentes mit der Kaustik bilden eine Strecke. Sie schließt mit der horizontalen Achse den kumulierten Winkel θ_n ein. Bei jeder Reflexion wächst dieser Winkel wie in Abb. 6.2 angedeutet um 2ψ , so dass

$$\theta_n = \theta_0 + n 2\psi \quad (6.2)$$

gilt. Der Winkel θ_n ist nicht auf das Intervall $[0; 2\pi]$ beschränkt ist. Eine Bahn ist daher durch die Anfangsbedingungen (ψ, θ_0) festgelegt.

Mit Gl. (6.1) muss $0 < \chi \leq \psi$ gelten. Die Anfangsbedingungen $\theta_0 = \pm\chi$ entsprechen gerade denjenigen Orientierungen, bei denen das austretende Bahnsegment durch den rechten Endpunkt der zentralen Linie läuft. Nach n Reflexionen schnei-

det die Teilchenbahn die Linie erneut, falls

$$-r \leq \frac{L}{\cos(\theta_n)} \leq r . \quad (6.5)$$

In χ ausgedrückt ergibt sich

$$\theta_n \bmod 2\pi \in [0; \chi] \cup [\pi - \chi; \pi + \chi] \cup [2\pi - \chi; 2\pi] , \quad (6.6)$$

oder äquivalent dazu muss es eine natürliche Zahl m derart geben, dass

$$m\pi - \chi \leq \theta_n \leq m\pi + \chi , \quad m = 0, 1, \dots . \quad (6.7)$$

Die letzte Bedingung besagt, dass das Teilchen dann aus dem Billard austritt, wenn der Abstand der Orientierung θ_n zum nächsten ganzen Vielfachen von π kleiner als χ ist. Um magische Zahlen zu berechnen, muss nun für jeden möglichen Wert θ_0 (vgl. Gl.(6.3)) das erste n gesucht werden, für das die Bedingung (6.7) erfüllt ist. Mit Gln. (6.2) und (6.3) liegen die möglichen θ_n in Intervallen der Länge 2χ um Vielfache von 2ψ ,

$$n2\psi - \chi \leq \theta_n \leq n2\psi + \chi , \quad n = 0, 1, \dots . \quad (6.8)$$

Wenn ein Intervall aus der Ungleichung (6.7) gemeinsame Werte mit einem Intervall aus der Ungleichung (6.8) hat, erreicht der entsprechende Teil der Bahnen die zentrale Linie. Mit dieser Suche nach Schnitten von Intervallen können die magischen Zahlen sehr einfach bestimmt werden. Bei festem Drehimpuls werden dazu lediglich die Startwerte θ_0 benötigt. Der Algorithmus ist schnell und akkurater als ein Strahlverfolgungsprogramm, das mit trigonometrischen Funktionen arbeitet. Für eine Visualisierung dieser Methode wird auf [106] verwiesen.

Mit dem Ungleichungssystem kann man folgende Ergebnisse beweisen:

- Für einen festen Drehimpuls gibt es maximal drei magische Zahlen¹⁴. Tabelle 6.1 gibt einige Beispiele für die Tripel in einem Θ -Billard mit $r/R = 1/3$.
- Gibt es drei magische Zahlen, so ist die höchste stets die Summe der beiden kleineren (Summenregel).

¹⁴Dieser Sachverhalt lässt sich auch über die Eigenschaften der Kreisabbildung [107] zeigen.

- Es gibt eine Nullmenge an Drehimpulsen, für die es nur zwei magische Zahlen gibt.
- Es gibt eine weitere Nullmenge mit nur einer endlichen magischen Zahl.
- Beim Drehimpuls $L = 0$ gibt es nur die magische Zahl 1 (trivialer Fall).

Tab. 6.1: Magische Tripel für verschiedene Werte des Drehimpulses L für ein Θ -Billard bzw. ein offenes Pilzbillard mit $r/R = 1/3$.

L	0.1000	0.5000	0.9000	0.9500	0.9800	0.9950	0.9980	0.9990	0.9992
n_1	1	1	1	4	5	9	14	14	37
n_2	4	4	4	5	9	14	23	37	51
n_3	5	5	5	9	14	23	37	51	88

6.3 Verweildauern bei variablem Drehimpuls

Bei Variation des Drehimpulses ist beobachtbar, wie magische Tripel ineinander übergehen. Abbildung 6.3 zeigt die magischen Zahlen über dem Drehimpuls aufgetragen. Man beachte, dass das gezeigte Drehimpulsintervall sehr klein ist und $L \approx r$ gilt. Die Tripel gehen diskontinuierlich ineinander über, indem ab einem bestimmten Drehimpuls eine magische Zahl verschwindet und eine neue hinzukommt, die die Summe oder Differenz der verbleibenden beiden ist, so dass die Summenregel erfüllt ist. Die Diskontinuitäten markieren gerade die Drehimpulse, bei denen es nur zwei magische Zahlen gibt. Diese Evolution der magischen Zahlen mit dem Drehimpuls erklärt, warum im gesamten Spektrum aller magischen Zahlen jede Zahl die Summe zweier vorheriger ist. Wenn jeweils die kleinste Zahl in einem Tripel verschwindet, entsteht eine Fibonacci Folge. Verschwindet hingegen die mittlere, bricht diese Systematik ab.

Die gestrichelte Linie in der Abbildung entspricht einem Drehimpuls, für den es nur eine magische Zahl gibt. In der Umgebung solcher Drehimpulse laufen

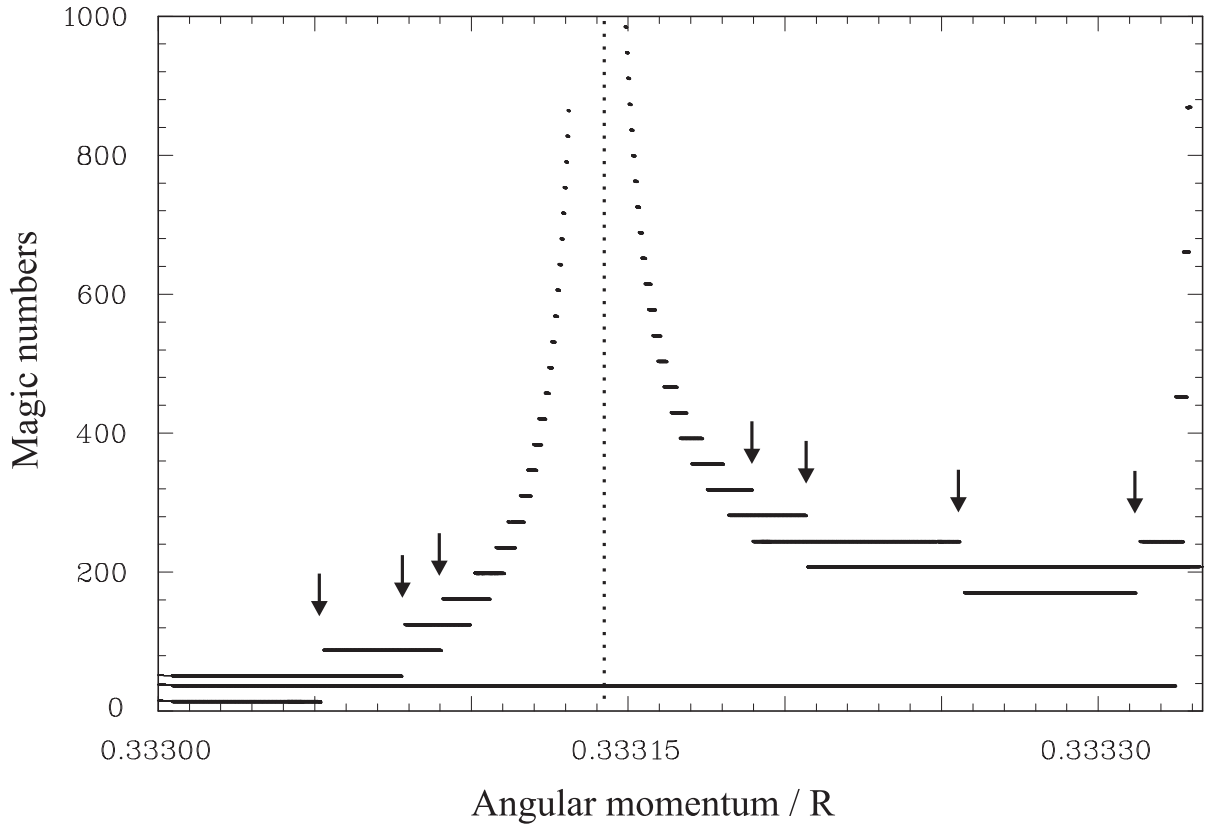


Abb. 6.3: Magische Zahlen eines Θ -Billards mit $r/R = 1/3$ in Abhängigkeit des Drehimpulses. Typischerweise existieren bei jedem Drehimpuls drei magische Zahlen. Die Übergänge zwischen zwei magischen Triplets geschehen diskontinuierlich (Pfeile), indem eine magische Zahl verschwindet und eine andere entsteht. Die resonanzartige Struktur um die gestrichelte Linie gehört zu einer Bahn, die in manchen Orientierungen existiert und in anderen nicht.

zwei der drei magischen Zahlen ins Unendliche. Physikalisch entsprechen diese Drehimpulse den neutralstabilen Bahnen, die in manchen Orientierungen stabil sein können. Mittlerweile konnte an einem Experiment mit Mikrowellenbillards gezeigt werden, dass diese Bahnen in Quantensystemen mit gemischter Dynamik Relevanz haben und ihre Stabilität messbar ist [108].

Die Summenregel erklärt auch die beobachtete Selektivität der magischen Zahlen. Abbildung 6.4 zeigt die Häufigkeiten der beobachteten magischen Zahlen über ihren Werten doppelt logarithmisch aufgetragen. Dafür wurden die magischen Zahlen bis zu 50000 für ein Θ -Billard mit $r/R = 1/3$ mit dem oben beschriebenen Algorithmus ermittelt. Die Anfangsbedingungen der aus der zentralen Linie

austretenden Teilchen wurden stochastisch verteilt gewählt. Die Selektivität ist auch für hohe magische Zahlen zu beobachten. Die beiden Verästelungen rühren von den resonanzartigen Strukturen her, von denen eine in Abb. 6.3 zu sehen ist.

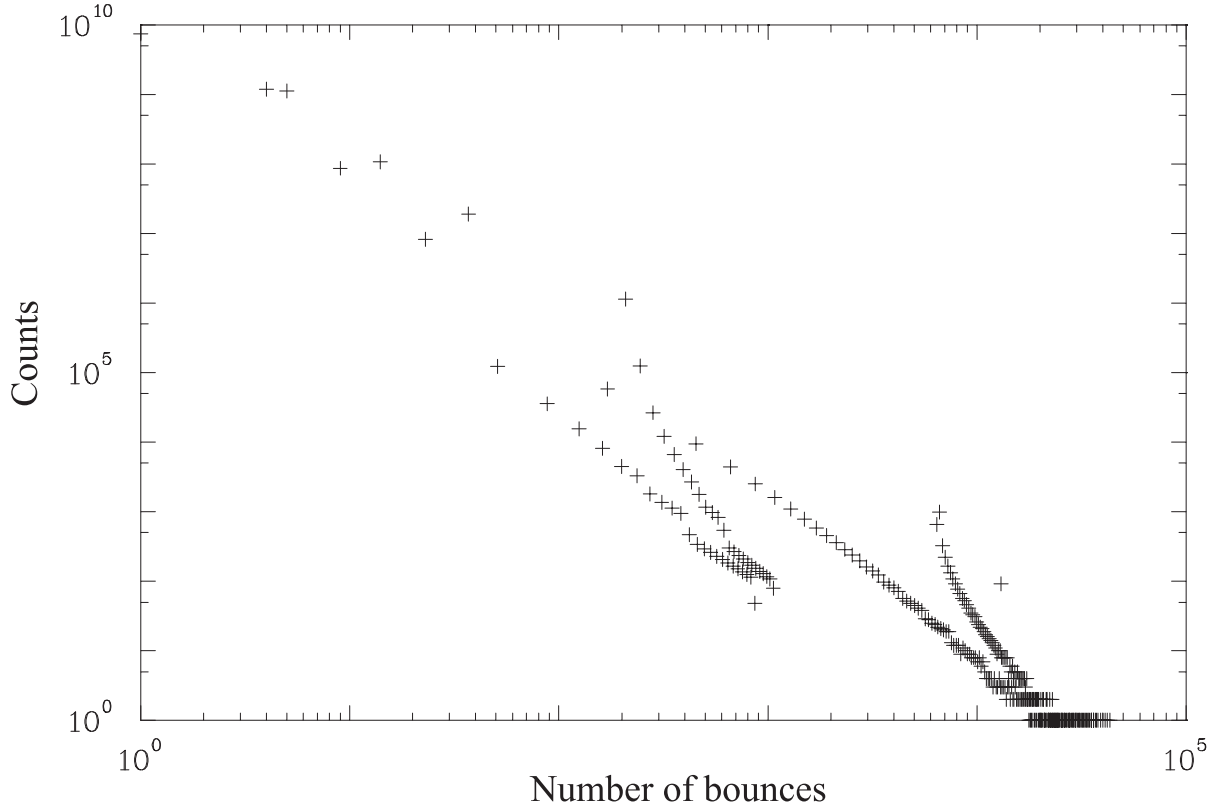


Abb. 6.4: Auftragung der Häufigkeit der magischen Zahlen über ihre Werte für ein Θ -Billard mit $r/R = 1/3$. Die Selektivität bleibt auch für hohe Zeiten erhalten.

6.4 Diskussion der Ergebnisse

Während in typischen gemischten Streusystemen, die ein KAM Szenario zeigen, ein periodisches Zeitverhalten der Verweildauern zu beobachten ist [101,105], zeigen offene Pilzbillards mit hinreichend kleinen Öffnungen eine große Selektivität und eine aperiodische Struktur in der Verteilung der Verweildauern. Es konnte in weiteren Studien gezeigt werden, dass sich diese Eigenschaften auf alle in

Abb. 3.2 gezeigten Formen der Pilzbillards (z.B. mit elliptischen Hüten bzw. Kreissegmenten als Hut) übertragen lassen. Für hinreichend niedrige Drehimpulse konnte darüber hinaus ein analytischer Ausdruck für das erste magische Tripel erarbeitet werden [106]. Durch geeignete Wahl der Öffnungsgröße kann damit in gewissen Grenzen ein offenes Pilzbillard entworfen werden, das ein gewünschtes Kurzzeitverhalten in einem Streuexperiment zeigt. Im Hinblick auf die raschen Entwicklungen im Bereich der Nanostrukturen erscheint dies als sehr interessant.

Damit verbunden stellt sich die Frage, in wie weit die Selektivität in einem quantenmechanischen Experiment erhalten bleibt. Diese Frage konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht vollständig beantwortet werden. Es wurde ein offener Mikrowellenresonator konstruiert, der dem Pilzbillard mit $r/R = 1/3$ entspricht. Von außen wurde von einer frei stehenden Antenne in einer Reflexionsmessung Mikrowellenleistung abgestrahlt und gemessen. Der relevante Teil des Spektrums wurde fouriertransformiert, was die Impulsantwort im Zeitraum liefert. Es konnten die ersten drei magischen Zahlen 1, 4 und 5 nachgewiesen werden. Da aber, wie in Abb. 6.4 zu erkennen ist, die Häufigkeiten der magischen Zahlen sehr schnell mit ihrem Wert abnehmen, waren selbst die Zahlen 4 und 5 durch eine sehr kleine Signalstärke ausgezeichnet. Die Quantenmechanik erschwert die Identifikation von magischen Zahlen zudem noch, da jedes Maximum im Zeitspektrum von seinen Harmonischen begleitet wird. Die magische Zahl 1 verursacht demnach auch Maxima bei 2, 3, usw. Die Zahlen 4 und 5 heben sich lediglich durch eine leicht erhöhte Amplitude über dieser Struktur ab. Nanostrukturen arbeiten typischerweise mit einem Verhältnis von Systemgröße zur Wellenlänge, das deutlich größer als 10 ist [16]. Dieses Regime liegt näher am semiklassischen Limes, weshalb die hier vorgestellten klassischen Eigenschaften der Zeitstruktur womöglich besser zur Geltung kommen, als im durchgeführten Experiment mit einem offenen Mikrowellenresonator.

7 Fluktuationen der Streumatrixelemente in Mikrowellenresonatoren

Streusysteme spielen eine große Rolle in vielen Bereichen der Physik [109]. In Streuexperimenten an Atomkernen werden Wirkungsquerschnitte von Kernreaktionen ermittelt. Es zeigen sich darin Resonanzen, die zu Zuständen des Targetkerns korrespondieren. Bei steigender Anregungsenergie überlappen die Resonanzen und interferieren miteinander. Schließlich lassen sich keine einzelnen Niveaus mehr auflösen. Die Anregungsfunktion fluktuiert dann statistisch – ein Phänomen, welches für den Bereich stark überlappender Resonanzen von Ericson vorhergesagt wurde [19] und wenig später in zahlreichen Arbeiten experimentell bestätigt werden konnte [110, 111]. Man betrachtete dabei die Autokorrelationsfunktion des fluktuierenden Wirkungsquerschnittes. Genau wie in der Statistik der Eigenwerte findet sich auch in den statistischen Eigenschaften der Fluktuationen physikalische Information über das Streusystem und die zu Grunde liegende Dynamik. Für das GOE wurde von Verbaarschot, Weidenmüller und Zirnbauer (VWZ) die Autokorrelationsfunktion der Streumatrixelemente hergeleitet [18]. Diese Ergebnisse sind für den Bereich isolierter bis hin zu stark überlappenden Resonanzen gültig. Die von VWZ hergeleiteten Ausdrücke wurden (außer für einige Sonderfälle) noch nie experimentell getestet.

Analogexperimente mit Mikrowellenresonatoren erlauben es, ebenfalls Anregungsfunktionen zu messen. Dabei zeigen sich in den wesentlichen Aspekten des Streuprozesses Parallelen zu Compoundkernreaktionen: Die Antennen übernehmen die Funktion der Reaktionskanäle, und die Streumatrix hat in beiden Fällen die selbe Gestalt. Die Streumatrix von Mikrowellenbillards kann außerdem in allen spektralen Bereichen in Amplitude und Phase bestimmt werden¹⁵. Ziel der in diesem Kapitel beschriebenen Experimente war es, präzise Daten für die Streumatrix zu erhalten, um damit die Vorhersagen von VWZ zu testen. Zunächst wird das zu Grunde liegende Experiment sowie die Aufbereitung der Daten beschrieben. Anschließend werden einige theoretische Grundlagen angegeben. Zum Schluss werden Experiment und Theorie verglichen und die Idee eines statistisch fundierten Testverfahrens für die VWZ-Beschreibung entwickelt. In einem kleinen Ausblick

¹⁵In kernphysikalischen Experimenten können lediglich die Wirkungsquerschnitte $\sigma \propto |S|^2$ bestimmt werden.

wird erläutert, in welchen Punkten die vorgelegte Analyse erweitert werden muss.

7.1 Experiment

Zur Bestimmung der Streumatrixelemente wurde eine Kavität in der Form eines Viertel-Stadionbillards benutzt, dessen planparallelen Wände einseitig abgeschrägt wurden, so dass es aus einem Viertelkreis mit einem angehängten Trapez besteht. Der Resonator wurde im Rahmen von [112] entwickelt. Ähnlich wie bei den dreieckigen Stämmen der Pilzbillards wurden in diesem Resonator parallele Wände vermieden, um die Existenz von neutralstabilen Bahnen (bouncing ball orbits) zu verhindern. Es ist bekannt, dass solche Bahnen nichtgenerische Beiträge zu den statistischen Eigenschaften der Spektren liefern – erst wenn man sie aus den Daten eliminiert wird Übereinstimmung mit Vorhersagen des GOE erreicht. Es konnte gezeigt werden, dass die statistischen Eigenschaften der Spektren des abgeschrägten Stadionbillards tatsächlich den GOE-Vorhersagen entsprechen.

Die Form des Resonators ist in Abb. 7.1 abgebildet. Der Konturrahmen des Bil-

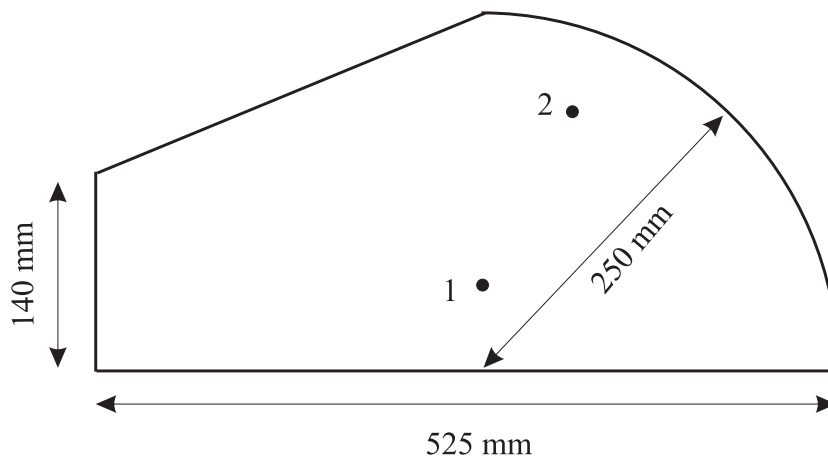


Abb. 7.1: Form und Maße des abgeschrägten Stadionbillards. Die beiden Punkte deuten die Positionen der Antennen 1 und 2 an.

lards ist aus Messing, Boden und Deckel sind aus Kupfer gefertigt. Der Resonator besitzt eine Höhe von 14.6 mm. Die Grenzfrequenz liegt nach Gl. (2.5) bei 10.2 GHz. Zwei Antennen 1 und 2 ragen 7.5 mm in die Kavität hinein.

Bei Raumtemperatur wurden mit einem Netzwerkanalysator die komplexen S -Matrixelemente an den beiden Antennen im Frequenzbereich von 3 – 16 GHz ausgemessen. Bei den beiden Reflexionsmessungen von S_{11} und S_{22} wurde eine Abtastrate von 250 kHz, bei der Transmissionsmessung¹⁶ von S_{12} von 100 kHz gewählt.

Die durchgeführten Messungen umfassen den Bereich von völlig isolierten bis hin zu überlappenden Resonanzen. Ein Maß für die Überlappung der Resonanzen ist das Verhältnis der mittleren Niveaubreite zum mittleren Eigenwertabstand Γ/D . Abbildung 7.2(a) zeigt einen Ausschnitt der Spektren für niedrige Frequenzen. Auf Grund der ziemlich großen Höhe des Resonators beträgt die Güte trotz langer Antennen in diesem Frequenzbereich etwa 5000, was für einen Resonator bei Raumtemperatur beachtlich ist. Die Resonanzen erscheinen demnach schmal und klar getrennt. Es gilt hier $\Gamma/D \ll 1$, der experimentell bestimmte Wert ist 0.028. In Abb. 7.2(b) wird ein entsprechender Ausschnitt kurz unterhalb der Grenzfrequenz Gl. (2.5) gezeigt. Einzelne Resonanzen können nicht mehr aufgelöst werden, da die Niveaudichte höher ist als bei niedrigen Frequenzen und die mittlere Breite einzelner Zustände mit der Frequenz anwächst. Es ergibt sich in diesem Bereich¹⁷ $\Gamma/D \approx 0.5$.

Aus Gl. (2.6) wird klar, dass die Resonanzen miteinander interferieren können. Würden sie sich inkohärent überlagern, so würden die Fluktuationen in Abb. 7.2 mit wachsendem Γ/D gering werden. Da sie sich kohärent überlagern, bleiben starke Fluktuationen in den Funktionen $S_{ab}(f)$; a und b sind Indices und können unabhängig voneinander die Werte 1 und 2 (bei zwei Antennen) annehmen. Die Anregungsfunktionen haben dabei eine mittlere Kohärenz- oder Kohärenzbreite Γ_{coh} , die verschieden von der mittleren Niveaubreite Γ ist. Anschaulich gibt sie den mittleren Frequenzabstand an, über den hinweg sich die Anregungsfunktion wesentlich ändert. Eine geeignete Observable zur Extraktion der Kohärenzbreite ist die Autokorrelationsfunktion

$$C_{ab}(\epsilon) = \langle S_{ab}(f) S_{ab}^*(f + \epsilon) \rangle - |\langle S_{ab} \rangle|^2, \quad (7.1)$$

deren Betragsquadrat von $\epsilon = 0$ bis $\epsilon = \Gamma_{\text{coh}}$ auf etwa die Hälfte abfällt.

¹⁶Da wegen gegebener Zeitumkehrinvarianz $S_{12} = S_{21}$ gilt, genügt es, nur eine Transmissionsmessung durchzuführen.

¹⁷Die Bestimmung von Γ beruht in dieser Schätzung auf der später eingeführten Kohärenzbreite Γ_{coh} .

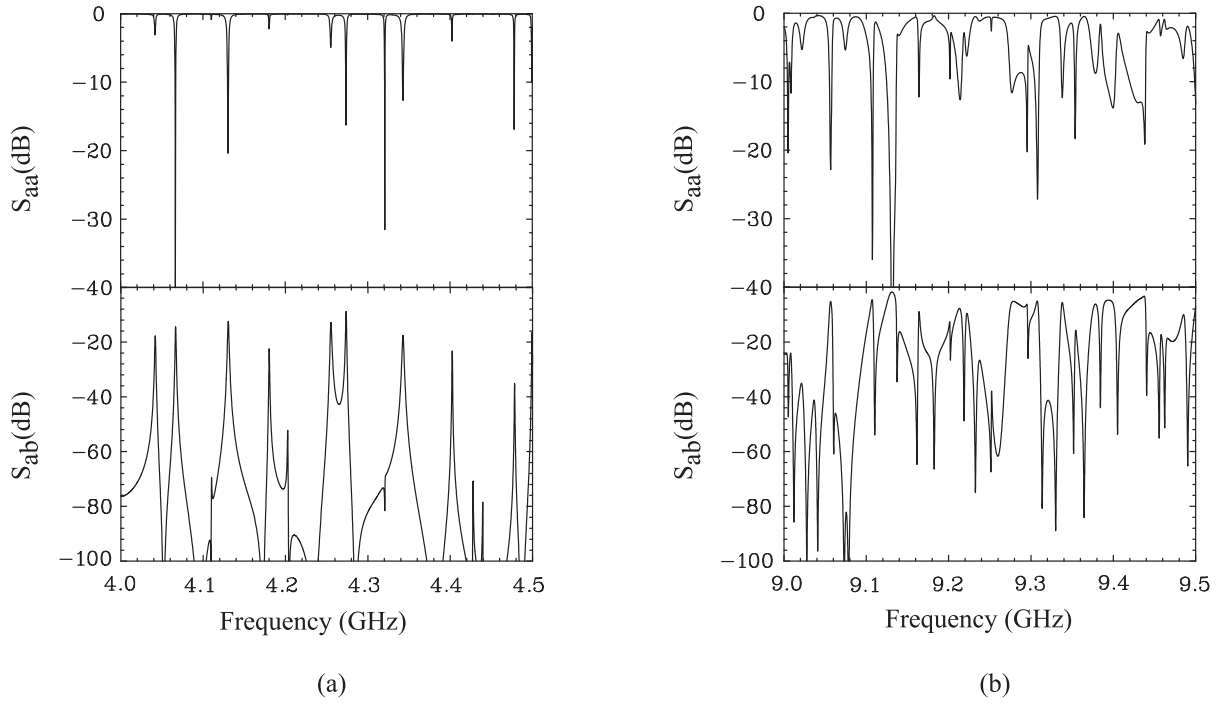


Abb. 7.2: Reflexions- (oben) und Transmissionsspektrum (unten) im Bereich isolierter (a) und überlappender Resonanzen (b) in halblogarithmischer Auftragung.

Zur genauen Bestimmung von C_{ab} muss S_{ab} mit hoher Präzision bekannt sein. Die Spektren wurden hierzu durch einen Kalibrationsvorgang aufbereitet, der sie von allen Einflüssen befreit, die nicht aus der Feldverteilung im Inneren der Kavität herrühren. Zunächst wurden die Spektren von den Einflüssen der Koaxialkabel zwischen dem Netzwerkanalysator und der Kavität befreit. Wegen der Laufzeit in den Kabeln beinhalten die gemessenen Spektren eine Phasendrehung, die proportional zur Kabellänge und zur Frequenz ist. Außerdem wird in den Kabeln Energie dissipiert, was die Amplituden verfälscht. Die im Netzwerkanalysator integrierte Elektronik trägt zu diesen Fehlern ebenfalls bei. In einem standardisierten Kalibrationsvorgang konnten diese Beiträge eliminiert werden. Abbildung 7.3 vergleicht ein Reflexionsspektrum vor (a) und dem nach (b) dem beschriebenen Kalibrationsvorgang. Die Amplituden verschieben sich durch die Kalibration und die starke Frequenzabhängigkeit der Phase verschwindet.

Zwei Korrekturen zu dieser Kalibration mussten angebracht werden:

- In Abb. 7.3(b) ist zu sehen, dass sich die Phase noch immer kontinuierlich mit der Frequenz verändert. Verantwortlich hierfür sind die endlichen

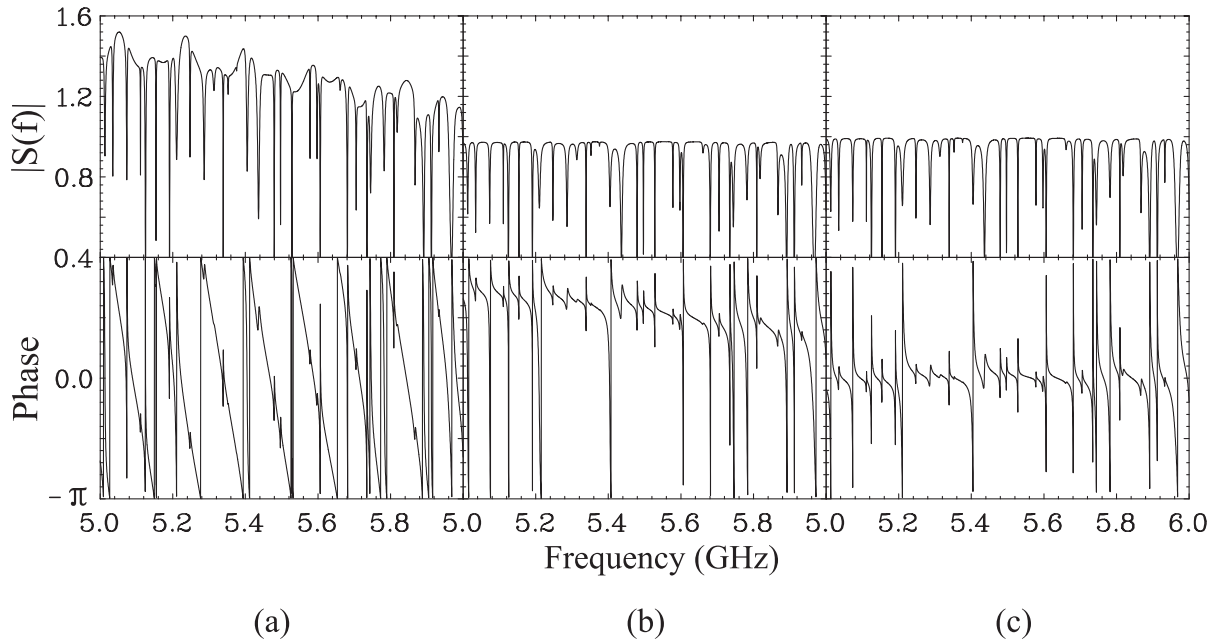


Abb. 7.3: Amplitude und Phase von S_{aa} vor (a) und nach (b) einer Kalibration, die Einflüsse der Kabel eliminiert, sowie nach einer Korrektur des Amplituden- und Phasenverlaufs (c). Die Phase ist letztlich im Mittel stabil und die Amplitude reicht bis an 1 heran, was vollständiger Reflexion entspricht.

Längen der Antennen sowie deren Halterungen, die zusammen 17.5 mm betragen. Auch wenn die Frequenzabhängigkeit nicht sehr groß ist, verfälscht sie die zu berechnende Größe $|\langle S \rangle|$ sehr stark. Daher wurde eine Gerade an den Phasenverlauf in den Bereichen angepasst, die frei von Resonanzen sind. Der damit gegebene langsame Gang der Phase wurde korrigiert.

- In der Abbildung ist auch zu erkennen, dass die Amplituden in resonanzfreien Bereichen nicht ganz an den dortigen Wert 1 heranreichen. Beim Übergang vom Koaxialkabel zur Antennenhalterung und von dieser zur eigentlichen Antenne treten Impedanzsprünge sowie Verluste auf, die in der Standardkalibration nicht mitberücksichtigt werden. Zur Bestimmung dieser Abweichung wurden mit den selben Antennenhalterungen und den selben Antennen Messungen an einem anderen Billardsystem, dem sog. Kreuzbillard durchgeführt. Das Kreuzbillard, das im Rahmen von [113] entwickelt wurde, besitzt eine geringe Fläche und daher bis in hohe Frequenzbereiche eine geringe Niveaudichte. Durch einen interpolierenden Streckenzug konnten die Abweichungen angenähert werden. Eine Division durch diesen

eliminiert die Störungen in den gemessenen Spektren des abgeschrägten Stadionbillards.

Abbildung 7.3(c) zeigt das Spektrum nach den beiden Korrekturen zur Kalibration. Die so erhaltene S -Matrix liefert die Informationen über den Streuvorgang selbst.

7.2 Modellvorstellungen

In der Streutheorie für Compoundkernreaktionen ist der Compoundkern, das Streuzentrum, wie in Abb. 7.4 gezeigt, über Kanäle an die Außenwelt gekoppelt.

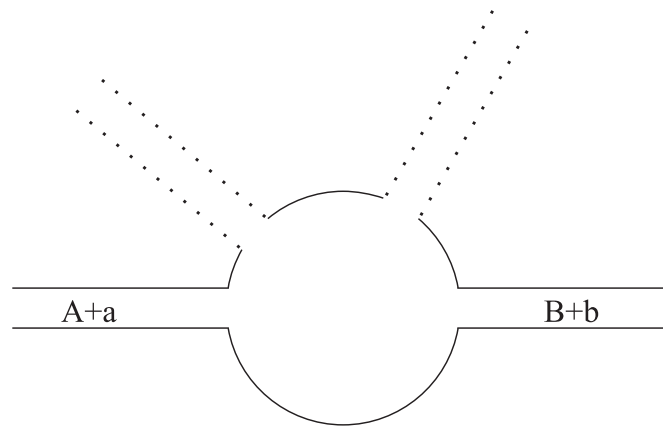


Abb. 7.4: Schematische Darstellung einer Compoundkernreaktion: Die Reaktionsprodukte können als Kanäle aufgefasst werden, über die die Anregung bzw. der Zerfall stattfindet. Der Compoundkern kann z. B. angeregt werden, in dem ein Kern A mit dem Projektil a beschossen wird. Er kann dann in den selben oder in einen anderen Kanal zerfallen. Mit zunehmender Energie wächst die Anzahl der offenen Kanäle (gestrichelt angedeutet). Allgemein lassen sich Streuprozesse in Kanälen darstellen, was den S -Matrixformalismus rechtfertigt. Das Bild ist vollständig auf Mikrowellenbillards übertragbar.

Ein Kanal $c = A + a$ beschreibt das Entstehen eines Compoundkerns durch Beschuss eines Targetkerns A mit dem Teilchen a oder den Zerfall in diese Fragmente. Man spricht dabei auch vom Eingangs- bzw. vom Ausgangskanal. Abhängig von der Energie können mehrere Kanäle c, c', \dots gleichzeitig „offen“ sein, d. h. es gibt mehrere Möglichkeiten für die Anregung und den Zerfall eines Compoundkerns.

Wie eingangs angedeutet kann diese Streusituation analog für Mikrowellenbillards formuliert werden: Das in der Kavität aufgebaute Feld wird durch eine Einkopplungsantenne c angeregt, und es zerfällt über eine Auskopplungsantenne c' . Dabei können c und c' – wie auch bei Compoundkernreaktionen – identisch sein. Die Absorption in den Wänden einer Kavität kann durch weitere offene Kanäle modelliert werden. Die Streufunktion kann als eine Matrix $S_{cc'}$ geschrieben werden, die die Übergangsamplituden vom Eingangskanal c in den Ausgangskanal c' enthält.

Findet eine Kernreaktion vom Kanal c in den Kanal c' *ohne* Ausbildung eines Zwischenkerns statt, so spricht man von einer direkten Reaktion. Bei Mikrowellenbillards entspricht sie der direkten Leistungstransmission von einer Antenne zur anderen *ohne* Wechselwirkung mit der Berandung und Ausbildung eines stehenden Wellenfeldes im Inneren des Resonators. Wenn umgekehrt keine direkten Prozesse eine Rolle spielen, findet Transmission nur über resonante Zustände statt, die gegenüber direkten Prozessen relativ langlebig sind. Direkte Prozesse passieren schnell, und der Beitrag zur Streumatrix ist unabhängig von der Frequenz. Daher ist $\langle S_{ab}(f) \rangle$ ein Maß für die Präsenz direkter Transmission. In den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimenten ergab sich für die Mittelung über Frequenzfenster der Länge 1 GHz überall ein Betrag kleiner als 0.03. Dies war zu erwarten, da die Durchmesser der Antennendrähte mit 0.5 mm sehr klein und der Abstand der beiden Antennen größer als eine halbe Wellenlänge gewählt wurde. Ein weiterer Vorteil, der in kernphysikalischen Reaktionen in der Regel nicht erfüllt ist, ist das Fehlen von Spinfreiheitsgraden. Dies und das Fehlen direkter Transmission erlauben einen rigorosen, direkten Test der Gültigkeit der VWZ-Beschreibung von Streumatrixfluktuationen¹⁸.

Zerlegt man die S -Matrix in einen mittleren Teil \bar{S} und einen fluktuierenden

¹⁸Ist diese Bedingung nicht erfüllt, kann die S -Matrix derart transformiert werden, dass sie anschließend mit den hier vorgestellten Methoden behandelt werden kann.

Teil S^{fl} , so spiegeln sich direkte Prozesse in ersterem und resonante Zustände in letzterem wider. Der Mittelungsbalken $\bar{\cdot}$ bezeichnet ein Ensemblemittel, welches bei der Auswertung experimenteller Daten durch das Scharmittel $\langle \cdot \rangle$ ersetzt werden darf. Die Wahrscheinlichkeit, über einen Kanal c einen Resonanzzustand anzuregen ist damit gerade

$$\begin{aligned} T_c &= \sum_{c'} \overline{|S_{cc'}^{fl}|^2} \\ &= 1 - \overline{|S_{cc}|^2} . \end{aligned} \quad (7.2)$$

Diese Größe wird Transmissionskoeffizient genannt. Die Identität beruht auf der Unitarität der gesamten S -Matrix $\sum_{c'} |S_{cc'}|^2 = 1$. Die statistischen Eigenschaften der fluktuierenden S -Matrix sind durch die Transmissionkoeffizienten sowie den mittleren Niveauabstand vollständig charakterisiert.

Die Fluktuationen der Streumatrix im Bereich überlappender Resonanzen wurden 1960 von Ericson vorhergesagt [19]. Für viele offene Kanäle mit $T_c \approx 1$ nimmt die Autokorrelationsfunktion (vgl. Gl. (7.1)) die Form

$$C_{ab}(\epsilon) = C_{ab}(\epsilon = 0) \frac{-i\Gamma_{\text{coh}}}{\epsilon - i\Gamma_{\text{coh}}} \quad (7.3)$$

erwartet. Hier wird $C(\epsilon)$ anstatt wie üblich $|C(\epsilon)|^2$ angegeben, um einen direkten Vergleich mit der VWZ-Beschreibung der Fluktuationen zu ermöglichen. Man erkennt, dass für $\epsilon = \Gamma_{\text{coh}}$ das Betragsquadrat der Autokorrelationsfunktion auf die Hälfte abfällt. Ein derartiges Verhalten wurde in zahlreichen Arbeiten gefunden. In einigen von ihnen wurde $C(0)$ auf die Hauser-Feshbach Formel

$$\begin{aligned} C_{ab}(0) &= \overline{|S_{ab}(f)|^2} \\ &= \frac{T_a T_b}{\sum_c T_c} \end{aligned} \quad (7.4)$$

zurückgeführt¹⁹. Die von Bohr vermutete Unabhängigkeit von Bildung und Zerfall eines Compundkerns äußert sich dabei darin, dass $C_{ab}(0)$ in Faktoren zerfällt, welche jeweils nur von a oder b abhängen. Die Kohärenzbreite konnte durch ein heuristisches Argument²⁰ von Weisskopf [114] ebenfalls auf die Transmissionsko-

¹⁹Es wurde festgestellt, dass diese Gleichung so nur für $a \neq b$ gilt. Beim Zerfall wird der Einfallskanal gegenüber den anderen bevorzugt, was die Einführung eines sog. *elastischen Verstärkungsfaktors* motivierte.

²⁰Die Zerfallzeit \hbar/Γ_c jedes Kanals multipliziert mit seinem Transmissionkoeffizient T_c sollte etwa der Heisenbergzeit \hbar/D entsprechen. Dabei bezeichnet Γ_c den Beitrag zur gesamten Kohärenzbreite Γ_{coh} .

effizienten und den mittleren Niveauabstand zurückgeführt werden,

$$\Gamma_{\text{coh}} \approx \frac{D}{2\pi} \sum_c T_c . \quad (7.5)$$

Die Beschreibung von Ericson-Fluktuationen vermöge der Gln. (7.3) und (7.4) ist nur im Bereich überlappender Resonanzen gültig. In den kernphysikalischen Arbeiten wurde sie, in leicht modifizierter Form v.a. für Wirkungsquerschnitte anstatt S -Matrixelemente, dazu benutzt, um die Niveaudichten der Compoundkerne abzuschätzen. Übersichtliche Darstellungen finden sich in [115]. Im Allgemeinen versagt jedoch diese Beschreibung, wenn die Transmissionskoeffizienten voneinander verschieden sind und beachtlich von 1 abweichen. In den betrachteten Kernspektren war die Annahme hinreichend gut erfüllt.

Eine Beschreibung für jeden Wert von Γ/D konnte jedoch nur durch eine Kombination von Zufallsmatrixtheorie und Streutheorie [20] entwickelt werden. Die S -Matrix wird angesetzt als

$$S(f) = \mathbb{1} - 2\pi i W^\dagger \left(E\mathbb{1} - H_{\text{int}} - i\pi W W^\dagger \right)^{-1} W . \quad (7.6)$$

Dabei bezeichnet H_{int} den Hamilton-Operator des isolierten Streusystems, dessen statistische Eigenschaften durch eine Matrix des GOE beschrieben werden, und die Kopplungsmatrix W beschreibt die Ankopplung der Eigenzustände von H_{int} an die Kanäle. Damit konnten Verbaarschot, Weidenmüller und Zirnbauer 1984 den analytischen Ausdruck

$$\begin{aligned} \overline{S_{ab}(f) S_{ab}^*(f + \epsilon)} &= \frac{1}{8} \int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty d\lambda_2 \int_0^1 d\lambda \mu(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \\ &\times \exp(-i\pi\epsilon(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda)/D) \\ &\times J_{ab}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \\ &\times \prod_e \frac{(1 - T_e \lambda)}{((1 + T_e \lambda_1)(1 + T_e \lambda_2))^{1/2}} \end{aligned} \quad (7.7)$$

mit

$$\mu(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda(1 - \lambda)|\lambda_1 - \lambda_2|}{(\lambda + \lambda_1)^2(\lambda + \lambda_2)^2(\lambda_1 \lambda_2(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2))^{1/2}} \quad (7.8)$$

und

$$\begin{aligned}
J_{ab}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = & \delta_{ab} T_a^2 (1 - T_a) \\
& \times \left(\frac{\lambda_1}{1 + T_a \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{1 + T_a \lambda_2} + \frac{2\lambda}{1 - T_a \lambda} \right) \\
& + (1 + \delta_{ab}) T_a T_b \\
& + \left(\frac{\lambda_1(1 + \lambda_1)}{(1 + T_a \lambda_1)(1 + T_b \lambda_1)} + \frac{\lambda_2(1 + \lambda_2)}{(1 + T_a \lambda_2)(1 + T_b \lambda_2)} \right. \\
& \left. + \frac{2\lambda(1 - \lambda)}{(1 - T_a \lambda)(1 - T_b \lambda)} \right)
\end{aligned} \tag{7.9}$$

herleiten. Dabei sind λ , λ_1 und λ_2 Integrationsvariablen, und das Ergebnis hängt wie die Gln. (7.3) mit (7.4) und (7.5) nur von den Transmissionskoeffizienten und dem mittleren Niveauabstand ab. Die Autokorrelationsfunktion des VWZ-Modells entspricht den Gln. (7.3) – (7.5), falls $\Gamma \gg D$ ist.

Zur Berechnung des Dreifachintegrals wurde nach [116] der Integrationsbereich geeignet in zwei Gebiete geteilt und auf jedem von diesen eine Variablentransformation derart vorgenommen, dass numerische Integrationsmethoden konvergieren. Die Integration wurde schließlich mit der in dem Computer-Algebrasystem Mathematica implementierten *Quasi Monte Carlo* Methode durchgeführt. Als Konsistenztest wurde geprüft, dass damit die bekannten Ergebnisse der Ericson-Fluktuationen sowie der isolierten Resonanzen reproduziert werden.

Da Gl. (7.7) keine einfach zugängliche Gestalt hat, wurde sie bisher in nur wenigen theoretischen [117, 118] und experimentellen [119–121] Arbeiten gezielt diskutiert oder angewendet. In [119] wurde Übereinstimmung gemessener Daten mit der VWZ-Beschreibung gefunden. Das präsentierte Datenmaterial ist allerdings recht begrenzt, und der verwendete Frequenzbereich schließt die Grenzfrequenz ein, ab der der verwendete Resonator dreidimensional wird. In [68, 120] wurde Übereinstimmung zwischen gemessenen Daten und der VWZ-Beschreibung im Bereich isolierter Resonanzen gefunden und durch eine stochastische Fehlerbehandlung bestätigt. In [121] konnte experimentell nachgewiesen werden, dass die statistischen Eigenschaften der Wirkungsquerschnitte Information über die Dynamik des Systems offenbaren. Ein statistisch fundierter Nachweis dafür, dass Gl. (7.7) tatsächlich gemessene Daten beschreibt, steht aus. Erste Schritte für einen rigorosen Test werden im folgenden Abschnitt geschildert.

7.3 Auswertungen der Korrelationsfunktionen

Zur Berechnung der Korrelationsfunktionen aus den gemessenen Spektren muss ein geeignetes endliches Frequenzfenster ausgewählt werden: Einerseits darf das benutzte Frequenzintervall nicht so groß sein, dass sich die Parameter (die Transmissionskoeffizienten und die Niveaudichte) über das Intervall hinweg signifikant ändern. Andererseits sollte es groß genug sein, um hinreichend viele Pole der Streumatrix zu umfassen. Je mehr Zustände zu den Fluktuationen beitragen, desto geringer sind die Abweichungen der zu berechnenden Größen von ihrem Grenzwert. Dieser Fehler wird *Finite Range of Data Error (FRD)* genannt. Alle Auswertungen im Rahmen dieser Arbeit wurden auf Frequenzfenstern der Breite 1 GHz durchgeführt, was wie sich zeigen wird einen guten Kompromiss darstellt.

Um die aus den gemessenen Daten berechneten Korrelationsfunktionen mit den Vorhersagen der VWZ-Beschreibung zu vergleichen, wird in der vorliegenden Arbeit eine ähnliche Strategie wie in [119] verfolgt. Es werden zunächst die zu den Antennen korrespondierenden Transmissionskoeffizienten sowie der mittlere Niveaubestand aus den gemessenen Spektren ermittelt. Zusätzlich findet Dissipation in den Wänden der Kavität statt, was durch viele Kanäle mit kleinem Transmissionskoeffizienten modelliert werden kann. Diese können nur durch eine Anpassung des VWZ-Integrals an die gemessene Autokorrelationsfunktion ermittelt werden. Die Anpassung wird im Zeitraum [122] durchgeführt, nachdem die experimentellen Anregungsfunktionen und die theoretische Korrelationsfunktion Fouriertransformationen unterworfen wurden. Der Übergang in den Zeitraum ist nötig, weil die einzelnen Punkte der Autokorrelationsfunktion des gemessenen Spektrums miteinander korreliert sind. Im Zeitraum hingegen sind die Fourierkoeffizienten unkorreliert, was eine verlässliche Behandlung der FRD-Fehler ermöglicht. Es gibt Arbeiten zu den FRD-Fehlern im Frequenzraum [123–125]. Im Rahmen der Theorie zu Ericson-Fluktuationen wurde bereits eine entsprechende Analyse wie hier im Zeitraum durchgeführt [126] und sogar ein Testverfahren angedacht [127]. Die Datenlage der vorliegenden Arbeit sorgt dafür, dass besonders viele unkorrelierte Fourierkoeffizienten zur Verfügung stehen, mit denen es möglich sein sollte, die VWZ-Beschreibung statistisch zu testen [122].

7.3.1 Bestimmung der Parameter des VWZ-Modells

In einem ersten Schritt wurden die Transmissionskoeffizienten der beiden Antennen T_a und T_b nach Gl. (7.2) bestimmt. Sie sind in Abb. 7.5 über der Frequenz aufgetragen. Sie schwanken, da sie selbst einem FRD-Fehler unterliegen. Die Änderung der Transmissionskoeffizienten von einem zum nächsten Frequenzfenster liegt nicht viel höher als die typische Schwankung, was die Wahl der Intervallbreite von 1 GHz rechtfertigt. Aus der Abbildung wird deutlich, dass im Experiment der gesamte Bereich von $T \ll 1$ bis $T \approx 1$ zugänglich ist.

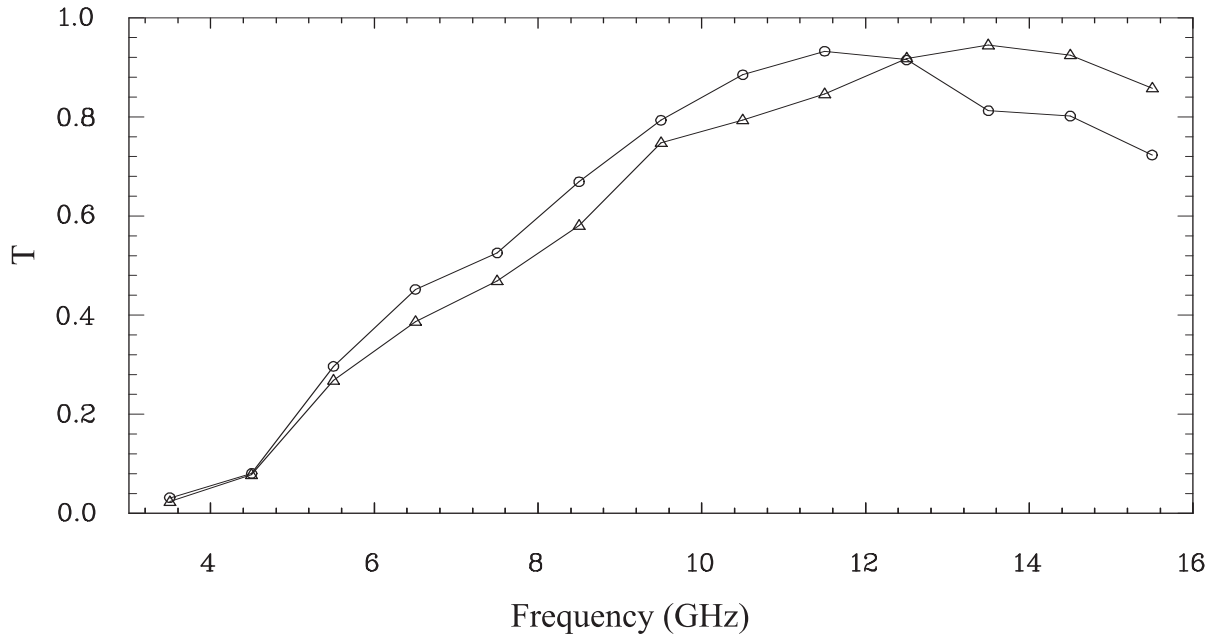


Abb. 7.5: Transmissionskoeffizienten der Antennen a und b , gekennzeichnet durch die Symbole \bigcirc bzw. \triangle . Der gesamte Bereich zwischen 0 und 1 ist im Experiment zugänglich.

Ein weiterer Eingabeparameter für das VWZ-Integral ist der mittlere Niveauabstand D . Unterhalb der Grenzfrequenz existieren nur zweidimensionale Moden, und die Anzahl der erwarteten Zustände wird durch die Weyl-Formel im Gl. (4.1) beschrieben. Im Bereich isolierter Resonanzen wurden die darin vorkommenden Parameter aus dem Experiment bestimmt. Der mittlere Niveauabstand ergibt sich aus Gl. (4.1) gemäß

$$D = \left(\frac{dN(f)}{df} \right)^{-1}. \quad (7.10)$$

Oberhalb der Grenzfrequenz existieren zweidimensionale TM Moden sowie dreidimensionale TM und TE Moden. Wie in Anhang C beschrieben, kann die Weyl-Formel für zylindrische Resonatoren auf drei Dimensionen zur Gl. (C.5) erweitert werden. Beim Überschreiten der Grenzfrequenz wächst die Niveaudichte schlagartig um den Faktor 3 an.

7.3.2 Absorption

Bei Experimenten mit Kavitäten bei Raumtemperatur ist die Dissipation durch die Antennen vergleichbar mit der durch die Kavitätswände. In [119] wurde sie durch viele absorbierende, sog. *parasitäre Kanäle* mit kleinen, gleichen Transmissionskoeffizienten modelliert. Deren Summe t_p ist der fehlende Eingabeparameter für Gl. (7.7), der nicht dem Experiment entnommen werden kann, sondern durch eine Anpassung bestimmt werden muss. Für die Berechnung des VWZ-Integrals wurde angenommen, dass sich der aus der Anpassung bestimmte Wert für t_p auf 300 parasitäre Kanäle verteilt.

Die Abschätzung von Fehlerbalken oder -bändern für die Autokorrelationsfunktion ist nicht ohne weiteres möglich, da benachbarte Datenpunkte korreliert sind. Im Zeitraum ist dieses Problem einfacher zu handhaben und mit Mitteln der Bayesschen Statistik [122, 128] mathematisch zu fassen. Das Wiener-Khinchin-Theorem der Mathematik

$$\tilde{C}(t) = |\tilde{S}(t)|^2 \quad (7.11)$$

besagt, dass die Fouriertransformierte $\tilde{C}(t)$ der Autokorrelationsfunktion einer Funktion $S(f)$ gerade gleich dem Betragsquadrat der Fouriertransformierten $\tilde{S}(t)$ dieser Funktion ist. Es genügt daher, das auf den Stützstellen f_ν gemessene Spektrum mittels einer diskreten Fouriertransformation in die Koeffizienten

$$\tilde{S}_k = \Delta \sum_{\nu=0}^{M-1} S_\nu \exp(-2\pi i \nu k / M) \quad (7.12)$$

zu transformieren. Dabei wurden die Diskretisierungsvorschriften

$$\begin{aligned} f_\nu &= \nu \Delta \quad , \quad \nu = 0, \dots, M-1 \quad ; \quad S_\nu = S(f_\nu) \\ t_k &= \frac{k}{M\Delta} \quad , \quad k = -m, \dots, m \quad ; \quad \tilde{S}_k = \tilde{S}(t_k) \end{aligned} \quad (7.13)$$

mit $m = (M - 1)/2$ benutzt. Real- und Imaginärteil der Fourierkoeffizienten S_k sind unkorrelierte Gaußsche Zufallsvariablen [129]. Das wurde an den experimentellen Daten geprüft. Ihre Betragsquadrate

$$x_k = |\tilde{S}_k|^2 \quad (7.14)$$

folgen dann der χ^2 -Verteilung mit zwei Freiheitsgraden

$$q(x_k|t_p) = \xi_k(t_p)^{-1} \exp(-x_k/\xi_k(t_p)) . \quad (7.15)$$

Ihre Mittelwerte $\xi_k(t_p)$ sind durch das anzupassende Modell gegeben, also durch die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion nach VWZ. Abbildung 7.6 zeigt die Fourierkoeffizienten des Transmissionsspektrums im Bereich von 9 – 10 GHz in halblogarithmischer Darstellung für positive Zeiten. Das Signal zerfällt

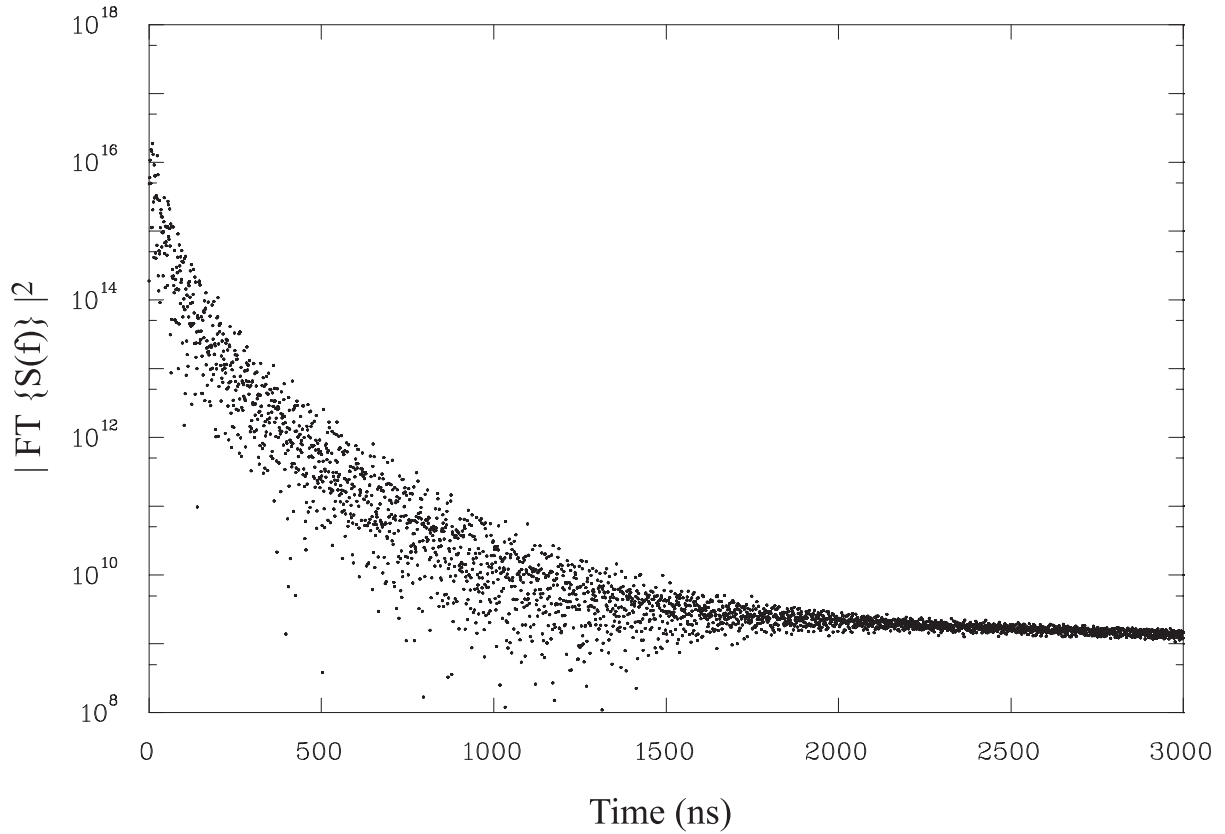


Abb. 7.6: Halblogarithmische Auftragung der Fourierkoeffizienten von S_{ab} im Bereich 9 – 10 GHz gegen die Zeit. Der Zerfall ist nicht-exponentiell.

deutlich sichtbar nicht-exponentiell. Für Streusysteme mit wenigen dominanten Kanälen ist genau das eine Signatur der statistischen Beschreibung im Rahmen

des VWZ-Modells [68, 120]. Der Zerfall ist über 6 Größenordnungen hinweg beobachtbar, bevor das Signal in Rauschen übergeht. Das Niveau des Rauschens wird durch die Genauigkeit des Messapparats bestimmt. Die Streuung der Punkte erscheint in logarithmischer Auftragung überall gleich groß, unabhängig von der Zeit, so wie man es aus der Verteilung Gl. (7.15) folgert. Der nicht-exponentielle Zerfall der Fourierkoeffizienten deutet darauf hin, dass die Korrelationsfunktion keine einfache Lorentzfunktion sein kann. Ansatzweise wird jedoch im Folgenden versucht, das VWZ-Integral mit einer Lorentzfunktion anzunähern. Für kleine Zeiten, in denen der Zerfallsexponent näherungsweise konstant bleibt, kann es dann an die Daten angepasst werden.

Da die x_k voneinander unabhängig sind, ist ihre Verbund-Verteilung durch

$$p(x|t_p) = \prod_k q(x_k|t_p) \quad (7.16)$$

gegeben. Die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t_p} p(x|t_p) = 0 \quad (7.17)$$

liefert den Maximum-Likelihood-Schätzer für t_p . Bei ihm ist Wahrscheinlichkeitsdichte für den experimentellen Datensatz $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ unter der gegebenen Verteilung p am größten.

Zur Bestimmung der $\xi_k(t_p)$ werden die Autokorrelationsfunktionen des VWZ-Modells mit den im letzten Abschnitt beschriebenen Eingabeparametern näherungsweise durch die Funktion

$$C(\epsilon) = -i \frac{B(t_p)}{\epsilon - i\Gamma_{\text{coh}}(t_p)} \quad (7.18)$$

dargestellt. Es wird also angenommen, dass das Integral (7.7) als Funktion von ϵ ähnlich Gl. (7.3) eine Lorentzkurve ergibt und der Zerfall des Systems also stets exponentiell ist. Die Größen B und Γ_{coh} sind Funktionen nur noch von t_p , weil T_a , T_b und D wie oben beschrieben festgelegt wurden. Während Gl. (7.3) mit der Normierung und der Kohärenzbreite zwei freie Parameter besitzt, sind diese hier mit t_p auf einen reduziert. Die Funktionen $B(t_p)$ und $\Gamma(t_p)$ wurden numerisch durch Berechnen des VWZ-Integrals ermittelt. Aus der diskreten Fouriertransformation

von $C(\epsilon)$ folgt

$$\xi(t_p) = 2\pi M \Delta B(t_p) \exp\left(\frac{-2\pi\Gamma_{\text{coh}}(t_p)k}{\Delta M}\right), \quad (7.19)$$

was in die Gln. (7.17) und (7.15) einzusetzen ist.

Da das VWZ-Modell Autokorrelationen von Transmissions- und Reflexionsspektren gleichermaßen beschreibt, wurde die Anpassung von t_p an den drei entsprechenden Sätzen von Fourierkoeffizienten gleichzeitig durchgeführt. Um den Ansatz Gl. (7.18) zu rechtfertigen, wurden nur die jeweils ersten 120 Fourierkoeffizienten berücksichtigt, über die hinweg der Zerfall als exponentiell betrachtet werden kann. Daraus ergibt sich mit Gl. (7.17) für jedes Frequenzfenster der optimale Wert t_p . Im Bereich überlappender Resonanzen liegt t_p in der Größenordnung von T_a und T_b . Aus der Leitfähigkeit der Resonatorteile lässt sich ein Wert für t_p abschätzen²¹, der in der Größenordnung des ermittelten Wertes liegt.

7.3.3 Vergleich: Experiment und VWZ-Vorhersage

In diesem Abschnitt werden die aus den gemessenen Spektren erhaltenen Autokorrelationsfunktionen mit denen des VWZ-Modells verglichen. In die Berechnung der letzteren fließen die experimentell bestimmten Transmissionskoeffizienten der Antennen, der ebenfalls experimentell bestimmte mittlere Niveauabstand und die aus der Anpassung erhaltene Summe über die parasitären Kanäle ein. Abbildung 7.7 zeigt links die Fourierkoeffizienten $\tilde{S}(t_k)$ für die Transmissions- und die beiden Reflexionsmessungen mit der angepassten Parametrisierung nach Gl. (7.19) für den Frequenzbereich von 9 – 10 GHz. In der rechten Hälfte sind die Korrelationsfunktionen im Frequenzraum gezeigt. Das VWZ-Modell beschreibt die Daten gut. Die Abweichungen im Frequenzraum liegen innerhalb der FRD-Fehler. In den anderen Frequenzbereichen unterhalb der Grenzfrequenz (2.5) sehen die Auftragungen qualitativ gleich aus.

In Abb. 7.8 werden die entsprechenden Ergebnisse für den Frequenzbereich von 10 – 11 GHz gezeigt. In der linken Hälfte werden die Zerfallskurven gerade noch gut durch das VWZ-Modell beschrieben. Die angepassten Geraden scheinen jedoch

²¹Diese Schätzung ist fehlerbehaftet, da kein idealer Kontakt zwischen den Bauteilen des Resonators erreicht wird. Daher muss t_p tatsächlich angepasst werden.

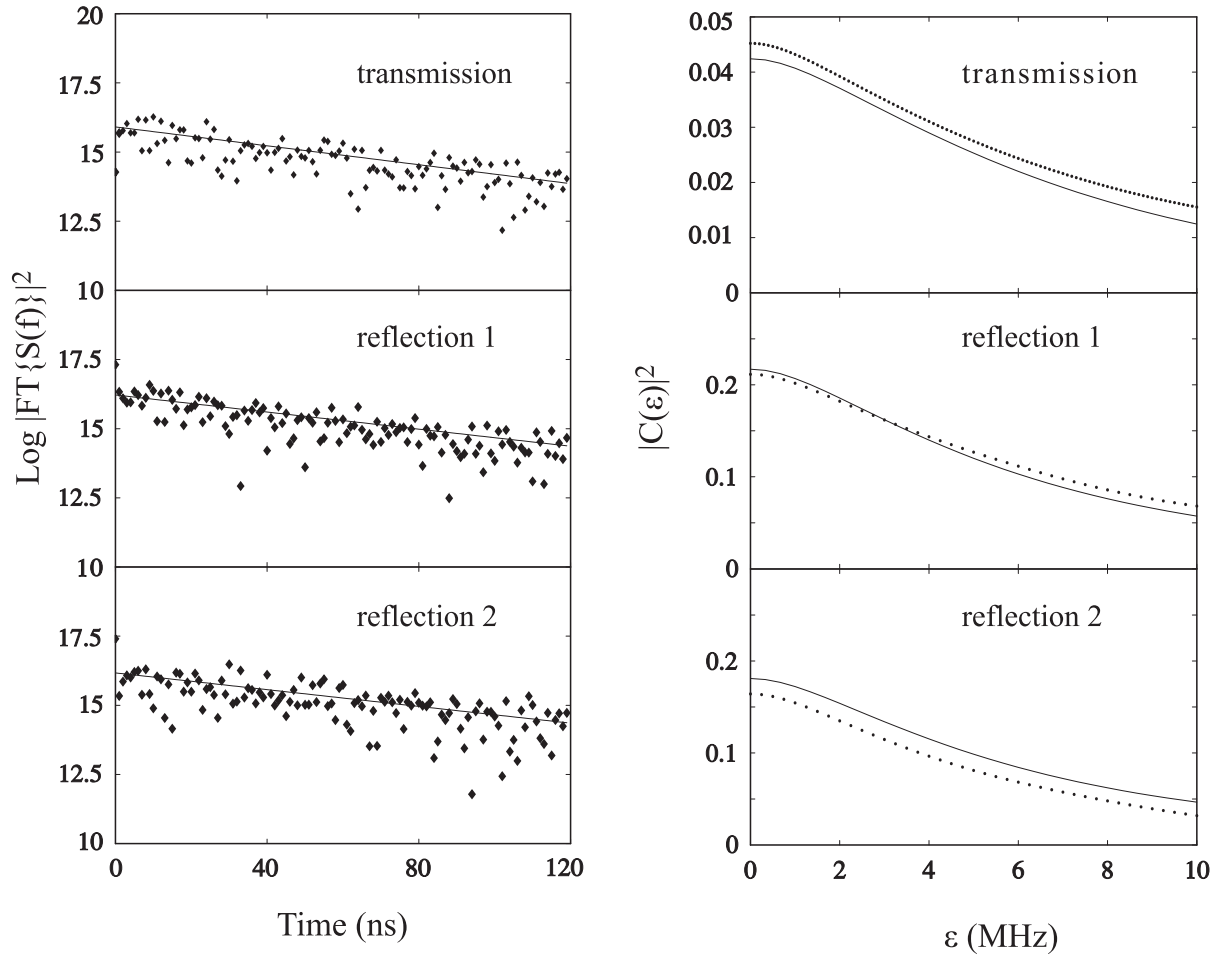


Abb. 7.7: Vergleich der Daten mit der VWZ-Beschreibung im Bereich von 9 – 10 GHz. Das VWZ-Modell wurde an die Fourierkoeffizienten des Transmissions- und der beiden Reflexionsspektren gleichzeitig angepasst (links). Die daraus resultierenden Autokorrelationsfunktionen (rechts, durchgezogene Kurven) beschreiben die gemessenen Daten (Punkte) gut.

zu geringe Steigungen zu haben, und man erwartet eine Diskrepanz zu den Datenpunkten, wenn man mehr verwenden könnte. Die Darstellungen im Frequenzraum (rechts) zeigen dementsprechend keine Übereinstimmung. Sowohl Breite als auch die Höhe der Daten werden von der VWZ-Beschreibung unterschätzt. Unter Berücksichtigung aller Punkte oberhalb des Rauschniveaus kann evtl. der nicht-exponentielle Zerfall von dem VWZ-Integral reproduziert werden. Hierzu muss dieses jedoch in den Zeitraum transformiert werden. Daraus kann t_p wie oben beschrieben durch eine Anpassung ermittelt werden. Dies stellt eine Erweiterung zu dem in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Vorgehen dar, wurde aber bereits

in Angriff genommen.

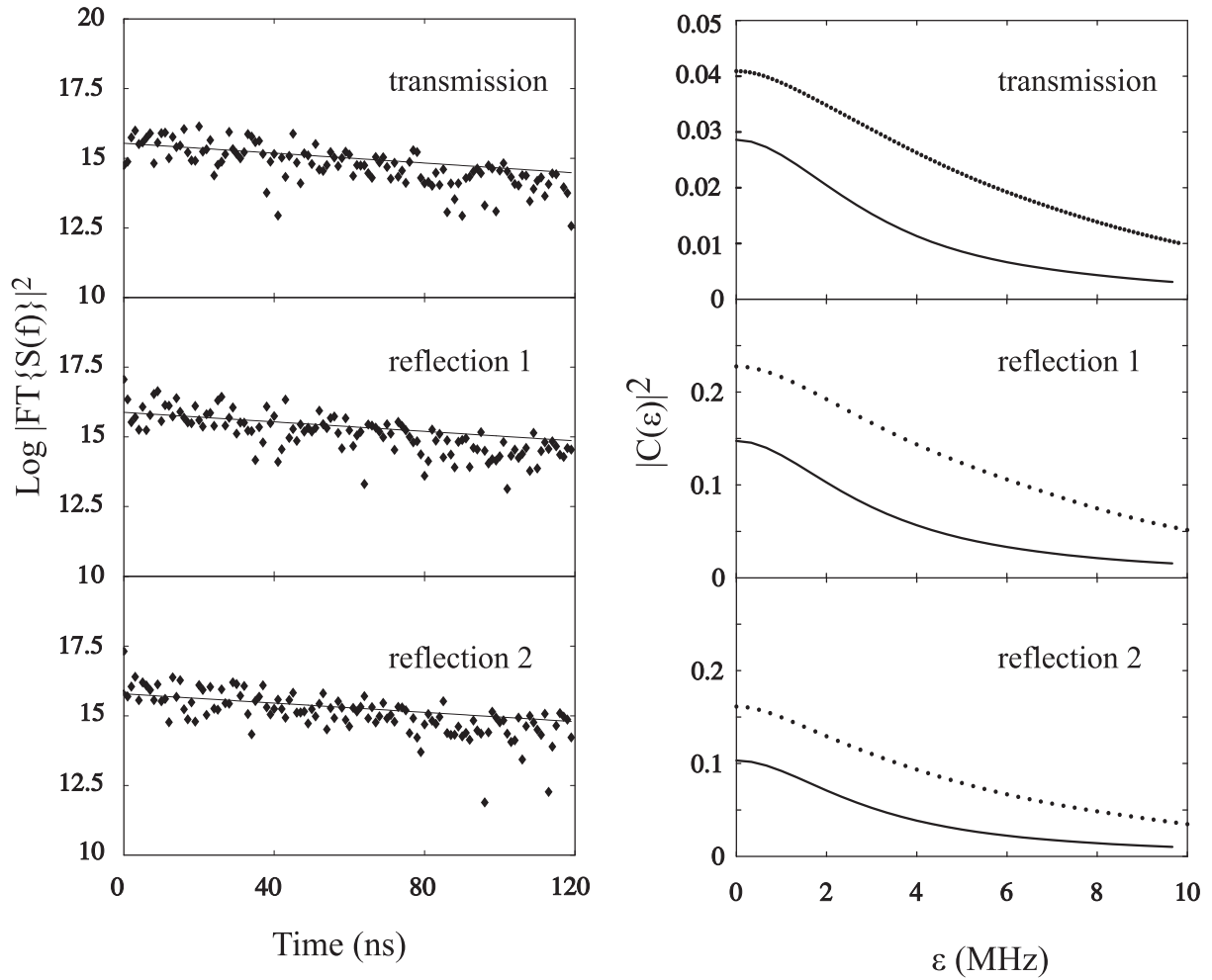


Abb. 7.8: Vergleich der Daten mit der VWZ-Beschreibung im Bereich von 10 – 11 GHz. Die Grenzfrequenz, ab der dreidimensionale Moden existieren, liegt bei 10.2 GHz. Das VWZ-Modell wurde an die Fourierkoeffizienten des Transmissions- und der beiden Reflexionsspektren gleichzeitig angepasst (links). Man erkennt, dass die Geraden zu flach in den Punkten liegen. Die daraus resultierenden Autokorrelationsfunktionen (rechts, durchgezogene Kurven) unterschätzen die gemessenen Daten (Punkte) in Höhe und Breite.

Die physikalische Situation, die zu den angedeuteten Abweichungen führt, wird folgendermaßen interpretiert: Kurz oberhalb der Grenzfrequenz besitzen 2/3 aller Moden eine dreidimensionale Feldverteilung und 1/3 eine zweidimensionale. Die zugehörigen Teilspektren wechselwirken nicht miteinander, d. h. die statistischen Eigenschaften des Systems können nicht mehr durch eine einzige Zufallsmatrix

des GOE beschrieben werden. Daher muss H_{int} durch mehrere GOE-Matrizen in block-diagonaler Anordnung modelliert werden. Weiterhin koppeln die dreidimensionalen Moden im Mittel schwächer als die zweidimensionalen an die Kavität, da ihr Feldprofil zum Kavitätsdeckel hin, aus dem die Antennen in die Kavität ragen, auf Null abfällt. Daher tragen trotz hoher Niveaudichte vorwiegend die zweidimensionalen Moden zur Ausbildung von Fluktuationen bei, wodurch die Korrelationslänge unterschätzt wird. Kürzlich konnte diese Interpretation durch RMT-Rechnungen bestätigt werden [130]. Dabei wurde die S -Matrix aus drei gleichgroßen Blöcken auf der Diagonalen zusammengesetzt, die den 2D Moden sowie den 3D TM und 3D TE Moden entsprechen. Sie wechselwirken nur über die Zerfallskanäle (Antennen und Wände) miteinander. Die Fluktuationseigenschaften der von diesem Modell erhaltenen Spektren zeigen qualitativ dieselben Abweichungen von der VWZ-Beschreibung wie die gemessenen Spektren des abgeschrägten Stadionbillards.

7.4 Ausblick

Auf Grundlage der Verteilung Gl. (7.15) der Fourierkoeffizienten konnte ein Testverfahren entwickelt werden, welches darüber urteilen soll, ob das VWZ-Modell die Daten beschreibt oder nicht. Der Test basiert ähnlich wie der bekannte χ^2 -Test auf einem Abstandsmaß, welches wiederum durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der logarithmierten Fourierkoeffizienten²² (Abb. 7.6) bestimmt wird. Tatsächlich kann man zeigen, dass die Streuung der logarithmierten Fourierkoeffizienten eine konstante Größe hat. Weiterhin ist dann die durchgeführte Maximum Likelihood Schätzung gerade äquivalent zur Minimierung des Abstandsmaßes.

Es zeigte sich jedoch, dass dieses Testverfahren mit nur 120 Fourierkoeffizienten nicht anwendbar ist – alle angepassten Beschreibungen nach VWZ, auch die für den Frequenzbereich in dem dreidimensionale Moden existieren, werden im Testurteil akzeptiert. Das widerspricht den starken Abweichungen zwischen den gemessenen Daten und der Beschreibung des VWZ-Modells. Man muss also davon

²²Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ist schief. Eine Gaußsche Näherung überschätzt die Verteilung auf der einen und unterschätzt sie auf der anderen Seite des Maximums. Dies verursacht im Mittel zu hohe χ^2 -Werte beim klassischen χ^2 -Testverfahren.

abkommen, nur Fourierkoeffizienten für kleine Zeiten zur Auswertung zu benutzen. Dies bedeutet aber auch, dass das angenommene Modell des exponentiellen Zerfalls Gl. (7.18) erweitert werden muss. Für einen fundierten Test müssen folgende Schritte unternommen werden:

- Anstatt der Gl. (7.18) muss das VWZ-Integral in den Zeitraum transformiert werden [118]. Das bestehende Konzept geht von einem exponentiellen Zerfall aus.
- Anstatt nur 120 Fourierkoeffizienten können dabei etwa 1000 Fourierkoeffizienten berücksichtigt werden. Der Informationsgehalt der Messdaten kann also voll ausgeschöpft werden.
- Die schiefe Verteilung der Fourierkoeffizienten sollte berücksichtigt werden in dem Test, ob das Modell die Daten beschreibt oder nicht.
- Das Niveau des Rauschens sollte als Parameter eingeführt werden.
- Da die Transmissionskoeffizienten der Antennen auch einem FRD-Fehler unterliegen, sollte sein Einfluss auf das Testverfahren geprüft werden.

Zum jetzigen Zeitpunkt kann festgestellt werden, dass das VWZ-Modell die Daten gut wiedergibt, solange sie GOE-Statistik zeigen. Im Bereich dreidimensionaler Moden geht diese Eigenschaft bei Resonatoren mit planparallelem Boden und Deckel verloren. Im beschriebenen Auswerteverfahren können die FRD-Fehler in den Fourierkoeffizienten der Anregungsspektren erfasst werden. Die in dieser Arbeit gewonnenen Daten sind nach Präzision und Vielfalt ausreichend für das noch auszubauende Testverfahren. Die Tatsache, dass ein nicht-exponentieller zeitlicher Zerfall im Bereich $\Gamma/D \approx 1$ gefunden wurde stellt eine klare Abweichung von den Vorhersagen im Rahmen des Ericson-Modells dar.

Auch an Pilzbillards, die einen Schwerpunkt dieser Arbeit bilden, wurden Spektren im Bereich überlappender Resonanzen aufgenommen. In [121, 131] wurde experimentell gezeigt, dass ein Einbruch in der Korrelationsfunktion bei kleinen Abständen, das sog. *Korrelationsloch*, in chaotischen Systemen beobachtet wird, in regulären jedoch nicht. Es stellt sich die Frage, ob man im Bereich überlappender Resonanzen erschließen kann, ob das System chaotisch ist oder nicht. An den

Spektren der Pilzbillards wurde festgestellt, dass dominante periodische Bahnen eine Superschalenstruktur verursachen (siehe Kap. 4). In gleicher Weise unterliegen nicht nur die Positionen der Resonanzen, sondern auch die Resonanzstärken einer Modulation über große Frequenzskalen. Kann man diese extrahieren, gibt ein Vergleich der Autokorrelationsfunktionen mit dem VWZ-Modell evtl. Aufschluss über die Frage, wie sich Regulärität und Chaos in den beobachtbaren Fluktuationen zeigen.

8 Schlussbemerkungen

In dieser Arbeit wurden mit gemischten und mit offenen Systemen zwei Schwerpunkte im Bereich Quantenchaos bearbeitet, die beide Gegenstand aktueller Forschung darstellen. Es ist auch in Zukunft zu erwarten, dass in beiden Richtungen viele Publikationen folgen werden, die auf ähnliche Fragestellungen abzielen wie diese Arbeit.

Pilzbillards haben einerseits zwar viele Besonderheiten, stellen aber gleichzeitig Musterbeispiele für Systeme mit gemischter Dynamik dar. Auf Grund ihrer Einfachheit haben sie außerdem einen nicht zu verachtenden pädagogischen Stellenwert. In der Arbeit wurde gezeigt, dass dynamisches Tunneln an ihnen sehr klar beobachtbar ist. Weitere Messungen scheinen in dieser Richtung angebracht. Mittlerweile sind Pilzbillards in begrenztem Umfang auch in numerischen Simulationen behandelbar. Konkret wären z. B. Untersuchungen zur Eigenwertdynamik der gemischten Moden von Interesse. Dabei könnte festgestellt werden, ob der Tunnelprozess in Pilzbillards universelle Eigenschaften zeigt, die für alle gemischten Moden gelten. Sollte es in nächster Zeit gelingen, Tunnelraten für ein ganzes Billardsystem anstatt nur für spezielle Situationen theoretisch zu beschreiben, so sind Pilzbillards gute Kandidaten hierfür, denn sie stellen die derzeit einfachsten bekannten Billardsysteme mit gemischter Dynamik dar.

Auch hinsichtlich der Schalenstruktur kann Eigenwertdynamik von Interesse sein: Wie stabil ist die Schalenstruktur gegenüber Deformationen des Hutes? Wie präsent ist die Superschalenstruktur in Abhängigkeit der Chaotizität des Systems? Es sind hierzu ebenfalls sowohl Experimente mit Mikrowellenbillards als auch Simulationen denkbar.

Die Frage, ob offene Pilzbillards neue Wege im Bereich der Nanostrukturen öffnen, geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus. Hierzu wären weitere Messungen bei höheren Frequenzen angebracht. Messungen an supraleitenden Kavitäten erscheinen hierzu geeignet. Allerdings ist keineswegs klar, wie man mit einer punktförmigen Antenne die Zerfalleigenschaften eines ganzen Systems messen kann. Auch die Definition einer quantenmechanischen Öffnung ist unklar: Während an einer physikalischen Öffnung Wellen reflektiert werden können, bewirkt Absorbermaterial für Mikrowellen eine nahezu vollständige Absorption, was einer Öffnung

im Sinne der klassischen Physik gleich kommt. Selbst einfache geöffnete Systeme wie ein Rechteck- oder ein Kreisbillard mit einer Öffnung auf der Berandung sind derzeit noch nicht vollständig verstanden. Es sind vorbereitende Untersuchungen in möglichst einfachen Geometrien wie Mehrfachspaltexperimente oder Experimente mit offenen Wellenleitern denkbar.

Die statistische Beschreibung der Korrelationsfunktionen von Spektren mit überlappenden Resonanzen durch das VWZ-Integral konnte im Rahmen dieser Arbeit durch Experimente an einem Mikrowellenresonator verifiziert werden. Ein fundierter Test hierfür steht aber noch aus, und in Kap. 7 wurden die dazu nötigen Schritte aufgelistet. Die Ausdehnung dieser Beschreibung auf gemischte Systeme sind von Interesse, da bisher noch kein einfach zugängliches Maß bekannt ist, um aus dem fluktuierenden Spektrum Informationen über die zu Grunde liegende Dynamik eines Systems zu erhalten. Auch hier erscheinen Pilzbillards als geeignete Systeme, da bei ihnen im Gegensatz zu anderen Systemen bereits bei geringen Eigenwertzahlen semiklassische Aussagen gültig sind. Die meisten isolierten, in der Natur vorkommenden Quantensysteme sind sphärisch und zeigen Schaleneffekte (Kerne, Atome, Moleküle, Metallcluster). Mit Pilzbillards ließe sich zudem die Frage klären, wie stabil diese Schaleneffekte bei Ankopplung an die Außenwelt sind.

A Bestimmung des Chaotizitätsgrades

Eine typische Wahl von Phasenraumvariablen für Billardsysteme, in welchen sich Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit frei bewegen können, ist der Ort im Billard, angegeben durch zwei Koordinaten x und y , sowie die Impulsrichtung $\alpha \in [0, 2\pi[$. Auf dem Phasenraum kann ein invariantes Maß

$$d\mu = dx dy d\alpha \quad (\text{A.1})$$

definiert werden. Der Volumenanteil der chaotischen Gebiete bezogen auf das Gesamtvolumen

$$q_c = \frac{\int \chi_{\text{Chaos}} d\mu}{\int d\mu} \quad (\text{A.2})$$

gibt den Anteil aller möglichen Anfangsbedingungen an, die zu einer chaotischen Bahn führen. In der vorliegenden Arbeit wird es kurz als Chaotizitätsgrad bezeichnet. Dabei ist χ_{Chaos} die charakteristische Funktion der chaotischen Gebiete des Phasenraums, ihr Wert beträgt 1 im Chaosmeer und 0 in Gebieten mit regulärer Dynamik. Unter Ausnutzen von Gl. (3.2) erhält man in Polarkoordinaten (ρ, φ)

$$q_c = \frac{A_S + \int_r^R p_c(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} d\varphi}{A}, \quad (\text{A.3})$$

wobei A die Billardfläche und A_S die Fläche des erweiterten Stamms bezeichnet. Daraus folgt für ein Pilzbillard mit rechteckigem Stamm

$$q_c = \frac{2rh + rR\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} + R^2 \arcsin\left(\frac{r}{R}\right)}{\frac{\pi}{2}R^2 + 2rh} \quad (\text{A.4})$$

und für ein desymmetrisiertes Pilzbillard mit einem dreiecksförmigen Stamm und einem 45°-Winkel an der Spitze

$$q_c = \frac{r^2 + rR\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} + R^2 \arcsin\left(\frac{r}{R}\right)}{\frac{\pi}{2}R^2 + r^2}; \quad (\text{A.5})$$

woraus sich für die im Experiment benutzten Billards mit $r/R = 2/3$ (großes Billard) bzw. $r/R = 1/3$ (kleines Billard) die Werte $q_c = 0.829$ bzw. $q_c = 0.455$ ergeben.

B Extraktion von Bahnen aus der Niveaudichte

Die Anzahl der Zustände eines Systems lässt sich nach

$$N(\epsilon) = N_{\text{Weyl}}(\epsilon) + N_{\text{osc}}(\epsilon) + N_{\text{fluc}}(\epsilon) \quad (\text{B.1})$$

in einen universellen, einen oszillierenden und einen fluktuierenden Beitrag aufteilen. Die Unterscheidung zwischen den letzten beiden ist in gewisser Hinsicht willkürlich. Typischerweise tragen aber bei Systemen mit regulärer oder gemischter Dynamik nur wenige Bahnen zu einem sichtbar oszillierenden Verhalten bei, und der zweite Beitrag besitzt höhere Amplituden als der dritte.

Da eine einzelne Bahn Einfluss auf die Position *aller* Eigenwerte hat, ist die Extraktion von Bahnen mit einer nichtlinearen Umskalierung der Frequenzachse, also einer Verschiebung aller Eigenwerte verbunden. Nach der Extraktion soll

$$N(\tilde{\epsilon}) = N_{\text{Weyl}}(\tilde{\epsilon}) + N_{\text{fluc}}(\tilde{\epsilon}) \quad (\text{B.2})$$

gelten. Mit $N_{\text{Weyl}}(x) = x$ ergibt sich durch Gleichsetzen von (B.1) und (B.2) die Vorschrift

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon + N_{\text{osc}}(\epsilon) . \quad (\text{B.3})$$

Hierbei wurde die Differenz der fluktuierenden Terme bereits vernachlässigt, was gerechtfertigt ist, wenn die Amplituden der Oszillationen größer als die der verbleibenden Fluktuationen sind. In der Praxis muss man also aus dem Experiment $N_{\text{osc}}(\epsilon)$ bestimmen und anschließend die Eigenwerte $\{\epsilon_i\}$ auf $\{\tilde{\epsilon}_i\}$ abbilden. Das so erhaltene umskalierte Eigenwertspektrum ist frei von den Beiträgen von N_{osc} .

C Weylsche Formel für zylindrische Mikrowellenresonatoren oberhalb ihrer Grenzfrequenz

Die erwartete Anzahl der Resonanzfrequenzen in einer flachen Mikrowellenkavität ist unterhalb der Grenzfrequenz f_{gr} nach Gl. (2.5) durch die Weyl-Formel Gl. (4.1)

gegeben. Als Funktion der Wellenzahl k ausgedrückt lautet sie

$$N^{2D}(k) = \frac{A}{4\pi}k^2 - \frac{L}{4\pi}k + C . \quad (\text{C.1})$$

In diesem Bereich existieren nur TM Moden, bei denen das elektrische Feld senkrecht zwischen Boden und Deckel (der z -Richtung) steht und entlang dieser Richtung einen konstanten Betrag hat. Die Zustände besitzen Feldverteilungen $E_n^{2D}(x, y)$ und Wellenzahlen k_n^{2D} , wobei n der Index der Zustände und x und y die Koordinaten in der Billardebene sind. Oberhalb der Grenzfrequenz existieren weitere zweidimensionale Moden mit dieser Eigenschaft, aber zusätzlich auch dreidimensionale TM bzw. TE Moden, deren elektrische bzw. magnetische Felder Funktionen von z sind. In zylindrischen Resonatoren sind Boden und Deckel zueinander parallel und mit senkrechten Wänden verbunden. Diese Symmetrie ergibt eine Quantisierungsbedingung für eine Dimension, aus der im Folgenden ähnlich wie in [132] eine Erweiterung der Weyl-Formel für zylindrische Resonatoren oberhalb f_{gr} hergeleitet wird.

Eine dreidimensionale TM Mode geht aus einer zweidimensionalen hervor, indem ihr Feldprofil mit einer cosinusförmigen Variation entlang der z -Achse versehen wird. Mit der Quantenzahl m , die die Anzahl der Wellenbäuche in z -Richtung zählt, und der Höhe d des Resonators ergibt sich

$$E_n^{3D}(x, y, z) = E_n^{2D}(x, y) \cos(k_z z) , \quad (\text{C.2})$$

$$k_z = \frac{m\pi}{d} . \quad (\text{C.3})$$

Die zugehörige Wellenzahl ist

$$k_n^{3D} = \sqrt{(k_n^{2D})^2 + (k_z)^2} . \quad (\text{C.4})$$

Bei gegebener Wellenzahl k ist daher die maximale Wellenzahl für die Schwingungen in der Billardebene durch $\sqrt{k^2 - k_z^2}$ gegeben. Die Weyl-Formel lässt sich somit als

$$N(k) = N^{2D}(k) + 2 \sum_{m>0} \Theta(k - m k_{\text{gr}}) N^{2D} \left(\sqrt{k^2 - k_z^2} \right) \quad (\text{C.5})$$

schreiben. Dabei ist $k_{\text{gr}} = \pi/d$ die zur Grenzfrequenz korrespondierende Wellenzahl. Der Faktor 2 vor dem Summenzeichen trägt der Tatsache Rechnung, dass

die Anzahl der TM und TE Moden in einem Frequenzintervall etwa gleich sind. Für große k , wenn hinreichend viele der Stufenfunktionen auf der rechten Seite berücksichtigt werden müssen, lässt sich die Summe von Polynomen zweiten Grades näherungsweise durch ein Polynom dritten Grades ersetzen, das bereits Weyl für beliebige elektromagnetische Resonatoren (ohne Quantisierungsbedingung) hergeleitet hat [133].

Literatur

- [1] A. Messiah, *Quantum Mechanics I* (John Wiley and Sons, New York, 1976).
- [2] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, (Gauthier-Villars, Paris, 1892).
- [3] A. N. Kolmogorov, *On Conservation of Conditionally-Periodic Motions for a Small Change in Hamilton's Function*, Dokl. Acad. Nauk. USSR **98**, 525 (1954);
V. I. Arnold, *Small Denominators II, Proof of a Theorem of A. N. Kolmogorov on the Preservation of Conditionally-Periodic Motions under a Small Perturbation of the Hamiltonian*, Russ. Math. Surveys **18**, 5 (1963);
J. Moser, *Convergent Series Expansions of Quasi-Periodic Motions*, Math. Ann. **169**, 163 (1967).
- [4] Ya. G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections*, Russ. Math. Surv. **25**, 137 (1970).
- [5] E. Ott, *Chaos in dynamical systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [6] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period Three Implies Chaos*, Amer. Math. Monthly **82**, 985 (1975).
- [7] T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. A. Weidenmüller, *Random-Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts*, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).
- [8] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
- [9] M. Brack and K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Westview Press, Boulder, 2003).
- [10] A. Richter, *Playing Billiards with Microwaves – Quantum Manifestations of Classical Chaos*, in *Emerging Applications of Number Theory*, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. **109**, ed. by D. A. Hejhal,

- J. Friedmann, M. C. Gutzwiller and A. M. Odlyzko, pp. 479 (Springer, New York, 1998).
- [11] H. J. Stöckmann, *Quantum Chaos – An Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
 - [12] L. A. Bunimovich, *Mushroom and other billiards with divided phase space*, Chaos **11**, 802 (2001).
 - [13] *Nobel Symposium: Quantum Chaos Y2K*, Conference Proceedings, Physica Scripta **T90** (2001).
 - [14] C. Dekker, *Carbon nanotubes as molecular quantum wires*, Physics Today **52** Nr. 5, 22 (1999).
 - [15] N. Agraït, A. L. Yeyati, and J. M. van Ruitenbeek, *Quantum properties of atomic-sized conductors*, Phys. Rep. **377**, 81 (2003).
 - [16] M. A. Reed, J. N. Randall, R. J. Aggarwal, R. J. Matyi, T. M. Moore, and A. E. Wetsel, *Observation of discrete electronic states in a zero-dimensional semiconductor nanostructure*, Phys. Rev. Lett. **60**, 535 (1988);
C. M. Marcus, R. M. Westervelt, P. F. Hopkins, and A. C. Gossard, *Phase breaking in ballistic quantum dots: Experiment and analysis based on chaotic scattering*, Phys. Rev. B **48**, 2460 (1993).
 - [17] T. Mayer-Kuckuk, *Kernphysik – Eine Einführung* (Teubner, Stuttgart, 2002).
 - [18] J. J. M. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller, and M. R. Zirnbauer, *Grassmann Integration and the Theory of Compound-Nucleus Reactions*, Phys. Lett. **149B**, 263 (1984);
J. J. M. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller, and M. R. Zirnbauer, *Grassmann Integration in Stochastic Quantum Physics: The Case of Compound-Nucleus Scattering*, Phys. Rep. **129**, 368 (1985).
 - [19] T. Ericson, *Fluctuations of nuclear cross sections in the “continuum” region*, Phys. Rev. Lett. **5**, 430 (1960).
 - [20] C. H. Mahaux and H. A. Weidenmüller, *Shell-Model Approach to Nuclear Reactions* (North-Holland, Amsterdam, 1969).

- [21] A. J. Lichtenberg and M. A. Liebermann, *Regular and chaotic dynamics* (Springer, New York, 1992);
H. Goldstein, *Klassische Mechanik* (Aula-Verlag, Wiesbaden, 1991).
- [22] H.G. Schuster, *Deterministisches Chaos* (VCH, Weinheim, 1994).
- [23] L. E. Reichl, *The transition to chaos* (Springer, New York, 2004).
- [24] L. A. Bunimovich, *On ergodic properties of certain billiards*, *Funct. Anal. Appl.* **8**, 254 (1974);
L.A. Bunimovich, *Conditions of stochasticity of two-dimensional billiards*, *Chaos* **1**, 187 (1991).
- [25] M. V. Berry, *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular 'billiard'*, *Eur. J. Phys.* **2**, 91 (1981).
- [26] L. A. Bunimovich, *On the Ergodic Properties of Nowhere Dispersing Billiards*, *Comm. Math. Phys.* **65**, 295 (1979).
- [27] O. Bohigas, D. Boosé, R. Eglydio de Carvalho, and M. Marvulle, *Quantum tunneling and chaotic dynamics*, *Nucl. Phys. A* **560**, 197 (1993).
- [28] A. F. Sadreev and K.-F. Berggren, *Signatures of quantum chaos in complex wavefunctions describing open billiards*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 10787 (2005).
- [29] L. A. Bunimovich and C. P. Dettmann, *Open circular billiards and the Riemann hypothesis*, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 100201 (2005).
- [30] Y. Hlushchuk, U. Kuhl, and S. Russ, *Level dynamics in pseudointegrable billiards: an experimental study*, *Physica A* **344**, 523 (2004);
E. Bogomolny and C. Schmit, *Structure of wave functions of pseudointegrable billiards*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 244102 (2004).
- [31] Y.-H. Kim, U. Kuhl, H.-J. Stöckmann, and J. P. Bird, *Investigating dynamical tunnelling in open quantum dots by means of a soft-walled microwave-cavity analog*, *J. Phys.: Condens. Matter* **17**, L191 (2005).
- [32] W. A. Majewski and M. Marciniak, *On quantum Lyapunov exponents*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, L523 (2006).

- [33] H. M. Pastawski, P. R. Levstein, and G. Usaj, *Quantum Dynamical Echoes in the Spin Diffusion in Mesoscopic Systems*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4310 (1995);
T. Prosen, T. H. Seligman, and M. Znidaric, *Theory of quantum Loschmidt echoes*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **150**, 200 (2003).
- [34] E. P. Wigner, *On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **47**, 790 (1951);
F. J. Dyson, *Statistical theory of energy levels of complex systems I, II, and III*, J. Math. Phys **3**, 140 (1962).
- [35] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic Press, San Diego, 1990).
- [36] O. Bohigas, *Random Matrices and Chaotic Dynamics*, in Chaos and Quantum Physics, M.-J. Giannoni, A. Voros and J. Zinn-Justin (Hrsg.), pp. 87 (Elsevier, Amsterdam, 1991).
- [37] R. U. Haq, A. Pandey, and O. Bohigas, *Fluctuation Properties of Nuclear Energy Levels: Do Theory and Experiment Agree?*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1086 (1982);
O. Bohigas and H. A. Weidenmüller, *Aspects of Chaos in Nuclear Physics*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **38**, 421 (1988);
J. F. Shriner, E. G. Bilpuch, P. M. Endt, and G. E. Mitchell, *Fluctuation Properties of States in $^{26}\text{Al}^*$* , Z. Phys. A **335**, 393 (1990);
S. Drożdż, A. Trellakis, and J. Wambach, *Spectral Decorrelation of Nuclear Levels in the Presence of Continuum Decay*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4891 (1996);
J. Enders, N. Huxel, P. von Neumann-Cosel, and A. Richter, *Where is the Scissors Mode Strength in Odd-Mass Nuclei?*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2010 (1997).
- [38] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).
- [39] S. Müller, S. Heusler, P. Braun, F. Haake, and A. Altland *Semiclassical Foundation of Universality in Quantum Chaos*, Phys. Rev. Lett. **93**, 014103

- (2004);
- S. Müller, S. Heusler, P. Braun, F. Haake, and A. Altland, *Periodic-orbit theory of universality in quantum chaos*, Phys. Rev. E **72**, 046207 (2005).
- [40] M. C. Gutzwiller, *Energy Spectrum According to Classical Mechanics*, Journ. Math. Phys. **11**, 1791 (1970).
- [41] M. V. Berry and M. Tabor, *Closed orbits and the regular bound spectrum*, Proc. R. Soc. London A **349**, 101 (1976);
M. V. Berry and M. Tabor, *Calculating the bound spectrum by path summation in action-angle variables*, J. Phys. A: Math. Gen. **10**, 371 (1977).
- [42] M. J. Davis and E. J. Heller, *Quantum dynamical tunneling in bound states*, J. Chem. Phys. **75**, 246 (1981);
W. P. Reinhardt, *Chaotic dynamics, semiclassical quantization, and mode-mode energy transfer: the Boulder view*, J. Phys. Chem. **86**, 2158 (1982);
A. M. Ozorio de Almeida, *Tunneling and the semiclassical spectrum for an isolated classical resonance*, J. Phys. Chem. **88**, 6139 (1984);
G. B. Akguc and L. E. Reichl, *Dynamic tunneling and scattering resonances*, Int. J. Quantum Chem. **98**, 173 (2004).
- [43] W. E. Bies, L. Kaplan, M. R. Haggerty, E. J. Heller, *Localization of eigenfunctions in the stadium billiard*, Phys. Rev. E **63**, 066214 (2001).
- [44] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley and Sons, New York, 1999).
- [45] H.-J. Stöckmann and J. Stein, *„Quantum“ chaos in billiards studied by microwave absorption*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2215 (1990).
- [46] E. Doron, U. Smilansky, and A. Frenkel, *Experimental demonstration of chaotic scattering of microwaves*, Phys. Rev. Lett. **65**, 3072 (1990).
- [47] S. Sridhar, *Experimental observation of scarred eigenfunctions of chaotic microwave cavities*, Phys. Rev. Lett. **67**, 785 (1991).
- [48] H.-D. Gräf, H. L. Harney, H. Lengeler, C. H. Lewenkopf, C. Rangacharyulu, A. Richter, P. Schardt, and H. A. Weidenmüller, *Distribution of eigenmodes*

in a superconducting stadium billiard with chaotic dynamics, Phys. Rev. Lett. **69**, 1296 (1992).

- [49] S. Deus, P.M. Koch, and L. Sirko, *Statistical properties of the eigenfrequency distribution of three-dimensional microwave cavities*, Phys. Rev. E **52**, 1146 (1995).
- [50] D.H. Wu, J.S. Bridgewater, A. Gokirmak, and S.M. Anlage, *Probability Amplitude Fluctuations in Experimental Wave Chaotic Eigenmodes with and Without Time-Reversal Symmetry*, Phys. Rev. Lett. **81**, 2890 (1998).
- [51] J. Barthelémy, O. Legrand, and M. Mortessagne, *Complete S matrix in a microwave cavity at room temperature*, Phys. Rev. E **71**, 016205 (2005).
- [52] H. Alt, P. von Brentano, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, M. Philipp, H. Rehfeld, A. Richter and P. Schardt, *Precision Test of the Breit-Wigner Formula on Resonances in a Superconducting Microwave Cavity*, Phys. Lett. B **366**, 7 (1996).
- [53] L. A. Bunimovich, *Control of Energy Distribution in Billards*, unveröffentlicht (2002).
- [54] L. A. Bunimovich, *Kinematics, equilibrium, and shape in Hamiltonian systems: The “LAB” effect*, Chaos **13**, 903 (2003).
- [55] E. G. Altmann, A. E. Motter, and H. Kantz, *Stickiness in mushroom billiards*, Chaos **15**, 033105 (2005).
- [56] E. G. Altmann, A. E. Motter, and H. Kantz, *Stickiness in Hamiltonian systems: From sharply divided to hierarchical phase space*, Phys. Rev. E **73**, 026207 (2006).
- [57] B. Dietz, T. Friedrich, M. Miski-Oglu, A. Richter, T.H. Seligman, and K. Zapfe, *Nonperiodic echoes from mushroom billiard hats*, Phys. Rev. E **74**, 056207 (2006).
- [58] H. Tanaka and A. Shudo, *Recurrence time distribution in mushroom billiards with parabolic hat*, Phys. Rev. E **74**, 036211 (2006).

- [59] T. Miyaguchi, *Escape time statistics for mushroom billiards*, preprint nlin.CD/0612058 (2006).
- [60] A.H. Barnett and T. Betcke, *Quantum mushroom billiards*, preprint nlin.CD/0611059 (2006).
- [61] M.A. Porter and S. Lancel, *Mushroom Billiards*, Notices of the AMS **53**, 334 (2006).
- [62] S. Lancel, M.A. Porter and L.A. Bunimovich, *One-particle and few-particle billiards*, Chaos **16**, 013129 (2006).
- [63] B. Dietz, T. Friedrich, M. Miski-Oglu, A. Richter, and F. Schäfer, *Spectral Properties of Bunimovich Mushroom Billiards*, Phys. Rev. E, in press (2007).
- [64] R. Balian and C. Bloch, *Distribution of Eigenfrequencies for the Wave Equation in a Finite Domain: III. Eigenfrequency Density Oscillations*, Ann. Phys. **69**, 76 (1972).
- [65] R. Hofferbert, *Wellendynamisches Chaos in einem supraleitenden 3D-Sinai-Billard und Chaos-induziertes Tunneln in einem 2D-Ring-Billard*, Dissertation, D17, TU-Darmstadt (1999);
C. Dembowski, H.-D. Gräf, A. Heine, R. Hofferbert, H. Rehfeld, and A. Richter: *First Experimental Evidence for Chaos-Assisted Tunneling in a Microwave Annular Billiard*, Phys. Rev. Lett. **84**, 867 (2000);
R. Hofferbert, H. Alt, C. Dembowski, H.-D. Gräf, H.L. Harney, A. Heine, H. Rehfeld, and A. Richter: *Experimental investigations of chaos-assisted tunneling in a microwave annular billiard*, Phys. Rev. E **71**, 046201 (2005).
- [66] J. Malovrh and T. Prosen, *Spectral statistics of a system with sharply divided phase space*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 2483 (2002).
- [67] M. Sieber, U. Smilansky, S.C. Creagh, and R.G. Littlejohn, *Non-generic spectral statistics in the quantized stadium billiard*, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 6217 (1993).
- [68] P. Schardt, *Mikrowellenexperimente zum chaotischen Verhalten eines supraleitenden Stadion-Billiards und Entwicklung einer Einfangsektion am S-DALINAC*, Dissertation, D17, TH-Darmstadt (1995).

- [69] C. Dembowski, *Aufbau eines modularen supraleitenden Hohlraumresonators auf der Basis von verbleitem Kupfer und Anderson-Lokalisierung in Mikrowellenbillards*, Diplomarbeit (1997), TU Darmstadt, unveröffentlicht.
- [70] H. Alt, *Gekoppelte supraleitende Mikrowellenbillards als Modellsystem für Symmetriebrechung*, Dissertation, D17, TU-Darmstadt (1998).
- [71] H. Rehfeld, *Statistische Analyse und semiklassische Beschreibung von supraleitenden Limaçon-Billards und Raysplitting in supraleitenden Mikrowellenbillards*, Dissertation, D17, TU-Darmstadt (2000);
C. Dembowski, H.-D. Gräf, A. Heine, T. Hesse, H. Rehfeld, and A. Richter, *First Experimental Test of a Trace Formula for Billiard Systems Showing Mixed Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3284 (2001).
- [72] N. Rosenzweig, C. E. Porter, “*Repulsion of Energy Levels*” in *Complex Atomic Spectra*, Phys. Rev. **120**, 1698 (1960);
T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, S. S. M. Wong, *Random-matrix physics: spectrum and strength fluctuations*, Rev. Mod. Phys. **53**, 385 (1981);
H. Hasegawa, H. J. Mikeska, and H. Frahm, *Stochastic formulation of energy-level statistics*, Phys. Rev. A **38**, 395 (1988);
F. M. Izrailev, *Intermediate statistics of the quasi-energy spectrum and quantum localization of classical chaos*, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, 865 (1989);
E. Caurier, B. Grammaticos, and A. Ramani, *Level repulsion near integrability: a random matrix analogy* J. Phys. A: Math. Gen. **23**, 4903 (1990);
G. Lenz and F. Haake, *Reliability of Small Matrices for Large Spectra with Nonuniversal Fluctuations*, Phys. Rev. Lett. **67**, 1 (1991);
T. Prosen and M. Robnik, *Semiclassical energy level statistics in the transition region between integrability and chaos: transition from Brody-like to Berry-Robnik behaviour*, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 8059 (1994);
A. Y. Abul-Magd, *Nearest-neighbour spacing distribution of energy levels in the region between integrability and chaos*, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 1 (1996);
C. I. Barbosa, C. L. Lima, M. S. Hussein, and M. P. Pato, *Deformed Gaussian orthogonal ensemble and the statistical fluctuations in the spectra of the*

- quartic oscillator*, Phys. Rev. E **59**, 321 (1999);
- A. Y. Abul-Magd, *Nonextensive random matrix theory approach to mixed regular-chaotic dynamics*, Phys. Rev. E **71**, 066207 (2005);
- V. A. Podolskiy and E. E. Narimanov, *Level spacing distribution in systems with partially chaotic classical dynamics*, Phys. Lett. A **362**, 412 (2007).
- [73] M. V. Berry and M. Robnik, *Semiclassical level spacings when regular and chaotic orbits coexist*, J. Phys. A: Math. Gen. **17**, 2413 (1984).
- [74] E. B. Bogomolny, *Distribution of energy levels of quantum systems*, JETP Lett. **41**, 65 (1985).
- [75] I. C. Percival, *Regular and irregular spectra*, J. Phys. B: Atom. Molec. Phys. **6**, L229 (1973).
- [76] H. P. Baltes and E. R. Hilf, *Spectra of Finite Systems* (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1976).
- [77] F. J. Dyson and M. L. Mehta, *Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. IV*, J. Math. Phys. **4**, 701 (1963);
- O. Bohigas, R. U. Haq, and A. Pandey, *Higher-Order Correlations in Spectra of Complex Systems*, Phys. Rev. Lett. **54**, 1645 (1985);
- O. Bohigas and M. J. Giannoni, *Chaotic Motion and Random Matrix Theory in Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics*, Lecture Notes in Physics, Vol. **209**, ed. by J. S. Dehesa, J. M. G. Gomez, and A. Polls, pp 1 (Springer, New York, 1983).
- [78] E. B. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit, *Models of intermediate spectral statistics*, Phys. Rev. E **59**, R1315.
- [79] T. H. Seligman and J. J. M. Verbaarschot *Fluctuations of quantum spectra and their semiclassical limit in the transition between order and chaos*, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, 2227 (1985);
- T. Prosen and M. Robnik, *Energy level statistics in the transition region between integrability and chaos*, J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993);
- T. Prosen and M. Robnik, *Numerical demonstration of the Berry-Robnik level spacing distribution*, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, L459 (1994);

- T. Prosen, *Berry-Robnik level statistics in a smooth billiard system*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 7023 (1998).
- [80] A. Hobson, *Ergodic properties of a particle moving elastically inside a polygon*, J. Math. Phys **16**, 2210 (1975).
- [81] H. Nishioka, K. Hansen, and B. R. Mottelson, *Supershells in metal clusters*, Phys. Rev. B **42**, 9377 (1990);
J. Pedersen, S. Björnholm, J. Borggreen, K. Hansen, T.P. Martin, and H.D. Rasmussen, *Observation of quantum supershells in clusters of sodium atoms*, Nature **353**, 733 (1991).
- [82] V.M. Strutinsky and A. G. Magner, *Quasiclassical theory of nuclear shell structure*, Sov. J. Par. Nucl. **7**, 138 (1976);
O. Bohigas and P. Leboeuf, *Nuclear Masses: Evidence of Order-Chaos Co-existence*, Phys. Rev. Lett. **88**, 092502 (2002);
H. Olofsson, S. Åberg, O. Bohigas, and P. Leboeuf, *Correlations in Nuclear Masses*, Phys. Rev. Lett. **96**, 042502 (2006).
- [83] D.F. Urban, J. Bürki, C.-H. Zhang, C. A. Stafford, and H. Grabert, *Jahn-Teller Distortions and the Supershell Effect in Metal Nanowires*, Phys. Rev. Lett. **93**, 186403 (2004).
- [84] Y. Yu, M. Ögren, S. Åberg, and S.M. Reimann, *Supershell structure in trapped dilute Fermi gases*, Phys. Rev. A **72**, 051602(R) (2005).
- [85] P. A. G. Magner, S.N. Fedotkin, K. Arita, K. Matsuyanagi, and M. Brack, *Periodic-orbit bifurcations and superdeformed shell structure*, Phys. Rev. E **63**, 065201(R) (2001).
- [86] S. Keppeler, *Level spacings and periodic orbits*, Phys. Rev. C **64**, 027201 (2001).
- [87] E. Doron and S. D. Frischat, *Semiclassical Description of Tunneling in Mixed Systems: Case of the Annular Billiard*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3661 (1995);
E. Doron and S. D. Frischat, *Quantum phase-space structures in classically mixed systems: a scattering approach*, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 3613 (1997);

- E. Doron and S. D. Frischat, *Dynamical tunneling in mixed systems*, Phys. Rev. E **57**, 1421 (1998).
- [88] S. Tomsovic and D. Ullmo, *Chaos-assisted tunneling*, Phys. Rev. E **50**, 145 (1994).
- [89] A. Bäcker, R. Ketzmerick, A. G. Monastera, *Universality in the flooding of regular islands by chaotic states*, preprint nlin.CD/0701032 (2007).
- [90] C. Eltschka and P. Schlagheck, *Resonance- and Chaos-Assisted Tunneling in Mixed Regular-Chaotic Systems*, Phys. Rev. Lett. **94**, 014101 (2005).
- [91] M. Miski-Oglu, *Superscars und Nodal Domain Statistik im symmetrischen Barrierenbillard*, Dissertation, TU-Darmstadt, in Vorbereitung.
- [92] L. C. Maier and J. C. Slater, *Field Strength Measurement in Resonant Cavities*, J. Appl. Phys. **23**, 68 (1952)
J. C. Slater, *Microwave Electronics* (D. van Nostrand Comp., Princeton, 1950).
- [93] T. Kürzeder, *Neueinstellung der Feldglattheit von supraleitenden Beschleunigerstrukturen für den S-DALINAC*, Diplomarbeit (2006), TU Darmstadt, unveröffentlicht.
- [94] S. Sridhar D. O. Hoogeboom, and B. A. Willemsen, *Microwave Experiments on Chaotic Billiards*, J. Stat. Phys. **68**, 239 (1992).
- [95] E. J. Heller, *Bound-State Eigenfunctions of Classically Chaotic Hamiltonian Systems: Scars of Periodic Orbits*, Phys. Rev. Lett. **53**, 1515 (1984).
- [96] A. Bäcker, R. Schubert, and P. Stifter, *Rate of quantum ergodicity in Euclidean billiards*, Phys. Rev. E **57**, 5425 (1998).
- [97] W. Bauer and G. F. Bertsch, *Decay of Ordered and Chaotic Systems*, Phys. Rev. Lett. **65**, 2213 (1990).
- [98] J. S. Hersch, M. R. Haggerty and E. J. Heller, *Diffractional Orbits in an Open Microwave Billiard*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5342 (1999);
J. S. Hersch, M. R. Haggerty and E. J. Heller, *Influence of diffraction on*

the spectrum and wave functions of an open system, Phys. Rev. E **62**, 4873 (2000).

- [99] H. Alt, H.-D. Gräf, H. L. Harney, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, and P. Schardt, *Decay of classical chaotic systems: The case of the Bunimovich stadium*, Phys. Rev. E **53**, 2217 (1996).
- [100] P. Šeba, F. Haake, M. Kus, M. Barth, U. Kuhl, and H.-J. Stöckmann *Distribution of the wavefunction inside chaotic partially open systems* Phys. Rev. E **56**, 2680 (1997).
- [101] C. Dembowski, B. Dietz, T. Friedrich, H.-D. Gräf, A. Heine, C. Mejía-Monasterio, M. Miski-Oglu, A. Richter, and T. H. Seligman, *First Experimental Evidence for Quantum Echoes in Scattering Systems*, Phys. Rev. Lett. **93**, 134102 (2004).
- [102] P. J. Oria Iriarte, *Vorbereitende Experimente zum Test der Riemannschen Hypothese in offenen Kreisbillards*, Forschungsarbeit (2006), TU-Darmstadt, unveröffentlicht.
- [103] M. Prusty and H. Schanz, *Self-pulsing of electron transmission by a transversal magnetic field*, cond-mat/0610799 (2006).
- [104] S. Smale, *Differentiable Dynamical Systems*, Bull. Am. Math. **73**, 747 (1967).
- [105] C. Jung, C. Mejía-Monasterio, O. Merlo, and T. H. Seligman, *Self-pulsing effect in chaotic scattering*, New J. Phys. **6**, 48 (2004);
H. Lee, C. Jung, and L. E. Reichl, *Scattering echoes in a wave guide with a ripple cavity*, Phys. Rev. B **73**, 195315 (2006).
- [106] B. Dietz, T. Friedrich, M. Miski-Oglu, A. Richter, T. H. Seligman, and K. Zapfe, *Nonperiodic echoes from mushroom billiard hats*, Phys. Rev. E **74**, 056207 (2006).
- [107] N. B. Slater, *Gaps and steps for the sequence $n\theta \bmod 1$* , Proc. Camb. Phil. Soc **63**, 1115 (1967).
- [108] E. Altmann, T. Friedrich, A. E. Motter, H. Kantz, and A. Richter, *Bouncing-ball orbits in circular-like billiards*, in Vorbereitung.

- [109] U. Kuhl, H.-J. Stöckmann, and W. Weaver, *Classical wave experiments on chaotic scattering*, J. Phys. A **38**, 10433 (2005).
- [110] B.W. Allardyce, P.J. Dallimore, I. Hall, N.W. Tanner, A. Richter, P. von Brentano, and T. Mayer-Kuckuk, *An analysis of cross-section fluctuations in the region $^{26}\text{Mg}(p, \alpha)^{23}\text{Na}$* , Nucl. Phys. **85**, 193 (1965);
 B.W. Allardyce, P.J. Dallimore, I. Hall, N.W. Tanner, A. Richter, P. von Brentano and T. Mayer-Kuckuk, *Modulated fluctuations in the reaction $^{26}\text{Mg}(p, \alpha)^{23}\text{Na}$* , Phys. Lett. **18**, 140 (1965);
 A. Richter, *Die Untersuchung der Kernreaktion $^{26}\text{Mg}(p, \alpha)^{23}\text{Na}$ und die Interpretation des Reaktionsmechanismus mit einem modifizierten statistischen Modell*, Dissertation, Ruprecht-Karl-Universität Heidelberg (1966).
- [111] L. Colli, U. Facchini, I. Iori, G.M. Marcazzan, M. Milazzo, and F. Tonolini, *Fluctuations in the cross section of $\text{Si}^{28}(n, \alpha)\text{Mg}^{25}$ reaction with fast neutrons*, Phys. Lett. **1**, 120 (1962);
 U. Facchini, E. Saetta Menichella, and F. Tonolini, *Statistical emission and Ericson fluctuations in (p, α) and (d, α) reactions*, Phys. Lett. **1**, 209 (1962);
 P. von Brentano, J. Ernst, O. Häusser, T. Mayer-Kuckuk, A. Richter, and W. von Witsch, *Statistical fluctuations in the cross section of the reactions $\text{Cl}^{35}(p, \alpha)\text{S}^{32}$ and $\text{Cl}^{37}(p, \alpha)\text{S}^{34}$* , Phys. Lett. **9**, 48 (1964).
- [112] M. Taheri Gelevarzi, *Gekoppelte Mikrowellenbillards unterschiedlicher Größen*, Diplomarbeit (2006), TU Darmstadt, unveröffentlicht.
- [113] F. Schäfer, *Untersuchung der Zeitumkehrinvarianz in Quantenbillards*, Diplomarbeit (2005), TU Darmstadt, unveröffentlicht.
- [114] J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics* (Springer, New York, 1979).
- [115] T. Ericson and T. Mayer-Kuckuk, *Fluctuations In Nuclear Reactions*, Ann. Rev. Nucl. Sci. **16**, 183 (1966);
 A. Richter, *Level Densities and Fluctuation Phenomena in Nuclear spectroscopy and reactions, Part B*, ed. by J. Czerny (Academic Press, New York, 1974).

- [116] J. J. M. Verbaarschot, *Investigation of the Formula for the Average of Two S-Matrix Elements in Compound Nucleus Reactions*, Ann. Phys. (N.Y.) **168**, 368 (1986).
- [117] J. Thomas, M.R. Zirnbauer, and K. Langanke, $^{26}\text{Al}(n,p)^{26}\text{Mg}$ reaction: *Comparison between the Hauser-Feshbach formula and the exact random-matrix result for the cross section*, Phys. Rev. C **33** (1986);
H.L. Harney and A. Hüller, *The Statistical Theory of Nuclear Reactions in the Limit of Isolated Resonances*, Z. Phys. A, **328**, 327 (1987);
H.L. Harney A. Hüller, M. Mayer, and A. Müller, *The Statistical Theory of Nuclear Reactions in the Limit of Isolated Resonances II*, Z. Phys. A, **335**, 293 (1990);
A. Müller and H.L. Harney, *The Statistical Theory of Nuclear Reactions in the Limit of Isolated Resonances III*, Z. Phys. A, **337**, 465 (1990);
C.H. Lewenkopf and H.A. Weidenmüller, *Stochastic versus Semiclassical Approach to Quantum Chaotic Scattering*, Ann. Phys. (N.Y.) **212**, 53 (1991);
F.-M. Dittes, F.L. Harney, and A. Müller, *Nonexponential decay of a stochastic one-channel system*, Phys. Rev. A **45**, 701 (1992).
- [118] T. Gorin and T.H. Seligman, *Signatures of the correlation hole in total and partial cross sections*, Phys. Rev. E **65**, 026214 (2002).
- [119] C.H. Lewenkopf, A. Müller, and E. Doron, *Microwave Scattering in an irregularly shaped cavity: Random-matrix analysis*, Phys. Rev. A **45**, 2635 (1992).
- [120] H. Alt, H.-D. Gräf, H.L. Harney, R. Hofferbert, H. Lengeler, A. Richter, P. Schardt and H.A. Weidenmüller, *Gaussian Orthogonal Ensemble-Statistics in a Microwave Stadium Billiard with Chaotic Dynamics: Porter-Thomas Distribution and Algebraic Decay of Time Correlations*, Phys. Rev. Lett. **74**, 62 (1995).
- [121] R. Schäfer, T. Gorin, T.H. Seligman and H.-J. Stöckmann, *Correlation functions of scattering matrix elements in microwave cavities with strong absorption*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 3289 (2003).
- [122] H.L. Harney, private Mitteilung (2006).

- [123] P. J. Dallimore and I. Hall, *An analysis of some cross-section fluctuation data*, Nucl. Phys. **88**, 193 (1966).
- [124] W. R. Gibbs, *Finite-Sample-Size Effects in Nuclear Cross-Section Fluctuations*, Phys. Rev. **139**, B1185 (1965).
- [125] M. Böhning, *Finite range of data errors in the statistical description of cross-sections*, Jahresbericht des MPI für Kernphysik 1965, 105 (1965).
- [126] M. Böhning and A. Richter, *Spectral analysis of fluctuation in the reaction $^{26}\text{Mg}(p,\alpha)^{23}\text{Na}$* in *Recent Progress in Nuclear Physics with Tandems*, ed. by W. Hering (MPI, Heidelberg, 1966);
P. G. Bizetti and A. M. Bizetti-Sona, *Isospin Selection rule in the $^{28}\text{Si}(d,\alpha)^{26}\text{Al}$ reaction*, Nucl. Phys. **A108**, 274 (1968);
J. Hellström and P. J. Dallimore, *Level widths in the compound nucleus ^{32}S from the reaction $^{31}\text{P}(p,p_o)$* , Nucl. Phys. **A125**, 684 (1969).
- [127] T. E. O. Ericson, *Fluctuation phenomena in nuclear reactions* in *Lectures in theoretical physics, Vol VIII C – Nuclear Structure Physics*, ed. by P. D. Kunz, D. A. Lind and W. E. Brittin (University Press, Boulder, 1965).
- [128] H. L. Harney, *Bayesian Inference* (Springer, New York, 2003).
- [129] H. A. Weidenmüller und H. L. Harney, private Mitteilung (2006).
- [130] B. Dietz, private Mitteilung (2007).
- [131] H. Alt, H.-D. Gräf, T. Guhr, H. L. Harney, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter and P. Schardt, *Correlation-Hole-Method for Spectra of Superconducting Microwave Billiards*, Phys. Rev. E **55**, 6674 (1997).
- [132] H. Alt, H.-D. Gräf, R. Hofferbert, C. Rangacharyulu, H. Rehfeld, A. Richter, P. Schardt, and A. Wirzba, *Chaotic dynamics in a three-dimensional microwave billiard*, Phys. Rev. E **54**, 2303 (1996).
- [133] H. Weyl, *Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **143**, 23 (1913).

Danksagung

Mein erster Dank geht an meinen Lehrer und Betreuer Professor Dr. Dr. h. c. mult. Achim Richter. Durch ihn kam ich in die Welt der Chaosphysik. Er setzte in mich das Vertrauen, die Themen dieser Arbeit anzugehen. Ich habe mich sehr von seiner Art, physikalische Probleme zu behandeln, inspirieren lassen: Der Intuition etwas Vertrauen schenken, Fingerspitzengefühl für eine Situation zu entwickeln und kompromisslos das Experiment entscheiden zu lassen sind nur einige Dinge, die ich bei ihm lernen konnte. Ich bedanke mich sehr herzlich!

Professor Dr. Hanns Ludwig Harney danke ich ebenfalls sehr. Ich habe die gemeinsame Arbeit genossen und sehr von seinem Verständnis in Fragen der Statistik profitiert. Besonders für seinen unermüdlichen Einsatz in der letzten Entstehungsphase dieser Arbeit bin ich ihm sehr dankbar.

Bei Professor Dr. Thomas Seligman möchte ich mich ebenso bedanken: Der Ausflug in die theoretische Physik hat mir sehr gut gefallen. Auch Professor Dr. Hans A. Weidenmüller danke ich sehr für seinen Einsatz. Seine physikalische Weitsicht hat mich sehr beeindruckt.

Ein großer und ganz herzlicher Dank geht natürlich an die Mitarbeiter der Arbeitsgruppe für Quantenchaos am IKP in Darmstadt: Mit Barbara, Maksim, Florian und Stefan hatte ich viel gelernt, erlebt und angestellt! Stets habe ich die Bereitschaft für gegenseitige Unterstützung gespürt. Auch den Alumni Christian Dembowski, Andreas Heine, Jonas Metz und Majid Taheri möchte ich an dieser Stelle für die schöne gemeinsame Zeit am IKP danken. Auch danke ich der restlichen Belegschaft vom Institut der Kernphysik für ihre Unterstützung – ich habe es genossen, in diesem Haus der offenen Türen zu arbeiten.

Den Herren PD Dr. A. Wirzba, Dr. A. Bäcker, MSc. E. Altmann sowie MSc. K. Zapfe danke ich herzlich für die gemeinsamen Tüfteleien an Problemen zu Systemen mit gemischter Dynamik.

Der Studienstiftung des Deutschen Volkes bin ich auch zu großem Dank für die Förderung über meine gesamte Studienzeit hinweg verpflichtet. Meinem sozialen Umfeld, besonders meinen Eltern, danke ich ebenso für die Unterstützung während der vergangenen Jahre.

Diese Arbeit wurde durch den SFB 634 der DFG gefördert.

Lebenslauf

Thomas Friedrich

21. Oktober 1977	Geboren in Groß-Umstadt
1984 – 1988	Besuch der Otzbergschule (Grundschule) in Otzberg-Lengfeld
1988 – 1997	Besuch der Max-Planck-Schule (Gymnasium) in Groß-Umstadt
Juni 1997	Abitur
1997 – 2003	Studium der Physik und Mathematik an der Technischen Universität Darmstadt
1997 – 2006	Stipendiat der Studienstiftung des Deutschen Volkes
1999 – 2000	Auslandsjahr am Trinity College, Dublin
Mai 2003	Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien (Mathematik / Physik)
Juli 2003	Diplom (Physik); Abschluss des Studiums
seit 2003	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Kernphysik der Technischen Universität Darmstadt

Eidesstattliche Erklärung:

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet und bisher noch keinen Promotionsversuch unternommen habe.

Darmstadt, im Februar 2007

Thomas Friedrich

